Вероятностные модели

5.09

<u>Литература.</u>

Королёв В.Ю. Теор. вер. и мат. стат.

Феллер В. Введение в теор. вер. и её приложения

Королёв В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я.
Математич. основы теории риска

<u>Опр</u> Вер. модель - матем. модель реального явления, содержащего элементы случайности

Случайность вводится, когда мы не можем учесть к/л законы природы

1) Наличие случайности (неопределённости)
2) Воспроизводимость (с учётом случайности)
3) Устойчивость частот

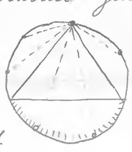
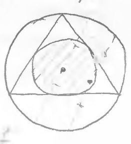
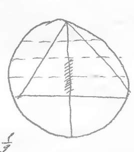
A $\frac{n_A}{n} \to p$ (с ростом n подходит ближе к p)

Стохастические ситуации

Нужно аккуратно выбирать вероятностное пр-во.

<u>парадокс Бертрана</u>

Какова вер-ть того, что длина <u>наугад</u> выбр. хорды больше длины стор. вп. правильного Δ?

1)

2)

3)


$p = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $p = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $p = \frac{1}{2}$

$\Omega = [0; 2\pi]$ $\qquad$ Ω = круг $\qquad$ Ω - диаметр

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ - вер. пр-во

Ω - произв. мн-во

$\mathcal{A}$ - σ-алгебра (класс подмн. в Ω)

Примеры $\Omega = [0;1]$

$\mathcal{A} = \{\varnothing, [0;1]\}$

$\xi(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega\in[0;\frac{1}{2}] \\ 1, & \omega\in(\frac{1}{2};1] \end{cases}$ – не случ. вел.

$B = \{1\} \Rightarrow \xi^{-1}(B) = (\frac{1}{2};1] \notin \mathcal{A}$

$\xi(\omega) = 3$

$\forall B$ если B содержит 3, то $\xi^{-1}(B) = [0;1]$

если B не содержит 3, то $\xi^{-1}(B) = \varnothing$

$P(A : \{\omega : \xi(\omega)\in B\})$ $\forall B \in \mathcal{B}$ обозн. $P(\xi\in B)$ – распред. ξ

$F_\xi(x) = P(\xi < x)$ – функция распр. сл. вел.

Св-ва функции распр-я

1) $0 \le F(x) \le 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$
2) $F(x)$ не убывает
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

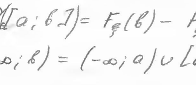
   $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$
4) $F(x)$ непрерывна слева

Виды распределений

а) абс. непрерывное распр. $\exists f_\xi(x)$: $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt$

$f_\xi(x)$ – плотность распр-я

б) дискретное распр. $F_\xi(x)$ кусочно постоянна



(имеет не более чем счётное число точек разрыва)

в) сингулярное распр. $F_\xi(x)$ непрерывно, но нет плотности

$P_\xi([a;b]) = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int\limits_a^b f_\xi(x)\,dx$ непр. случай

$(-\infty;b) = (-\infty;a)\cup[a;b)$

$= \sum\limits_{x_i\in[a;b)} P(\xi = x_i)$ дискр. случай

$$P(\xi \in B) = \int_B f_\xi(x)\,dx$$
$$= \sum_{x_i \in B} P(\xi = x_i)$$

"среднее" "ожидаемое" "наиб. вероятное" значение сл. вел.

$\mathbb{E}\xi = \int_\Omega x\,dF_\xi(x)$ а) дискр. $\mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(\xi = x_i)$ – сх. абс.

б) абс. непр $\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx$ – сх. абс.

Мат. ожидание не всегда определено, но всегда единственно

$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ $\mathbb{E}\xi$ не сущ.

Опр Пусть $q \in [0,1]$. Тогда X_q – это q-квантиль распр-я P_ξ – такое число, что

$P(\xi \le X_q) \ge q$, $P(\xi \ge X_q) \ge 1-q$

Если F – непр $F(X_q) = q$ – найдём X_q

Опр Медианой распр P_ξ $\operatorname{med}\xi$ наз-ся квантиль $X_{\frac{1}{2}}$ и если F – непр. $\Rightarrow F(\operatorname{med}\xi) = \frac{1}{2}$

Медиана всегда определена, но не всегда единственна

$\xi = \begin{cases} 1 & p = \frac{1}{2} \\ 0 & q = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\operatorname{med}\xi$ – $\forall$ точка $\in [0,1]$

$\mathbb{P}(\xi \le \operatorname{med}\xi) \ge \frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(\xi \ge \operatorname{med}\xi) \ge \frac{1}{2}$

$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{2}$

Мода а) абс. непр $f_\xi(\operatorname{mod}\xi) \ge f_\xi(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

б) дискр. $\mathbb{P}(\xi = x_k) \ge P(\xi = x_i)$ $\forall i \ne k$

$x_k = \operatorname{mod}\xi$

12.09

Пусть мы перемещаемся из т. a в т. b.
Значит затраты на это $(b-a)^2$ – функция потерь
ξ – точка, в которую попадаем
Как минимиз. функцию потерь?

$\mathbb{E}(\xi - a)^2 \to \min_a$?

$\mathbb{E}(\xi^2 - 2a\xi + a^2) = \mathbb{E}\xi^2 - 2\mathbb{E}\xi a + a^2$

$a_{min} = \mathbb{E}\xi$

Пусть $|b-a|$ - функция потерь

$\mathbb{E}|\xi-a| \to \min$

Докажем, что $med\,\xi$ минимизирует ф-цию потерь, т.е.

$\mathbb{E}|\xi-a| - \mathbb{E}|\xi - med\,\xi| \geq 0$ всегда

$|\xi-a| - |\xi - med\,\xi| \textcircled{=}$

(пусть $a \geq med\,\xi$)

$$\textcircled{=} \begin{cases} med\,\xi - a, & \xi \in [a, +\infty) \\ a + med\,\xi - 2\xi, & \xi \in (med\,\xi; a) \\ a - med\,\xi & \xi \in (-\infty; med\,\xi] \end{cases}$$

$a + med\,\xi - 2\xi \geq med\,\xi - a, \qquad \xi \in (med\,\xi, a)$

$$\Rightarrow |\xi-a| - |\xi - med\,\xi| \geq (med\,\xi - a) I_{\xi \in [a;+\infty)} + (med\,\xi - a) I_{\xi \in (med\,\xi, a)} +$$

$$+ (a - med\,\xi) I_{\xi \in (-\infty; med\,\xi]}$$

$$\mathbb{E}|\xi-a| - \mathbb{E}|\xi - med\,\xi| \geq (med\,\xi - a)\left(\mathbb{P}(\xi \geq a) + \mathbb{P}(med\,\xi < \xi < a)\right) +$$

$$+ (a - med\,\xi)\left(\mathbb{P}(\xi \leq med\,\xi)\right) = \underbrace{(a - med\,\xi)}_{\geq 0}\underbrace{\left(\mathbb{P}(\xi \leq med\,\xi) - \mathbb{P}(\xi > med\,\xi)\right)}_{\geq 0} \geq 0$$

(если $a < med\,\xi$ - аналогично)

Пусть среднегодовой доход описывается

$\mathbb{P}(\xi \geq x) = e^{-x}, \quad x \geq 0$

Какой доход у среднего жителя?

$\mathbb{E}\xi = 1$

$med\,\xi = \quad 1 - e^{-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \ln 2 \approx 0,7$

$mod\,\xi = 0$

Как выбрать "центральное" значение?

Зависит от цели

„Мультимодальное" распределение - несколько мод

Модели разброса сл. величины
(относительно ее центр. точки)

• $D\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \min_a \mathbb{E}(\xi - a)^2$

$Dc\xi = c^2 D\xi$

$D\xi \geq 0$

$D\xi = 0 \iff \xi \overset{\text{почти всюду}}{=} c$

• $\mathbb{E}|\xi - \mathrm{med}\,\xi| = \min_a \mathbb{E}|\xi - a|$

Нечасто использ., т.к. ф-ция модуль недифф.

$\sqrt{D\xi}$ - средне квадратич. отклонение использ. чаще

• $\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|$

Интерквартильный размах

x_q - q - квантиль

$[x_{\frac{1}{4}}, x_{\frac{3}{4}}]$ - интерквартп. размах

$|\mathbb{E}\xi - \mathrm{med}\,\xi|$? - какая разность

$$|\mathbb{E}\xi - \mathrm{med}\,\xi| \underset{\text{нер-во Йенсена}}{\leq} \mathbb{E}|\xi - \mathrm{med}\,\xi| \leq \mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi| \underset{\text{нер-во Ляпунова}}{\leq} (\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{D\xi}$$

Независимость

Опр. События $A, B \in \mathcal{A}$ наз-ся независимыми, если $P(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Колода карт → вытаскиваем карту

$\mathbb{P}(\text{туз пик}) = \frac{1}{52}$

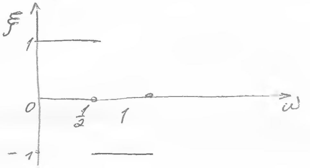
$\mathbb{P}(\text{туз}) = \frac{1}{13}$, $\mathbb{P}(\text{пик}) = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ события независ.

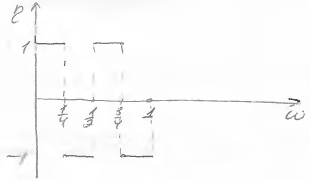
Добавим джокер: $\mathbb{P}(\text{туз пик}) = \frac{1}{53}$

$\mathbb{P}(\text{туз}) = \frac{4}{53}$ $\quad \mathbb{P}(\text{пик}) = \frac{13}{53}$ $\Rightarrow$ события зависимы

Опр $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ – независимы в совокупности
$\forall i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n \quad \mathbb{P}(A_{i_1} \ldots A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k})$

Опр ξ, η – сл. вел. независимы, если $\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$
$\mathbb{P}(\xi \in B_1, \eta \in B_2) = \mathbb{P}(\xi \in B_1)\mathbb{P}(\eta \in B_2)$





$\xi^2 + \eta^2 = 2$
$\mathbb{P}(\xi = \pm 1) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(\eta = \pm 1) = \frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(\xi = \pm 1, \eta = \pm 1) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

Зависимость сл. вел. измеряется ковариацией
$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)] = \mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\,\mathbb{E}\eta$

$\tilde{\xi} = \xi + c$ ковариация не изменится

Положит. коррелируемые величины – при ↑ одной второй ↑.
Иначе – отриц. коррел.
Коэф корреляции $\operatorname{cor}(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi\,\mathbb{D}\eta}}$
ξ и η – независ $\Rightarrow \mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta$
$\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta + 2\operatorname{cov}(\xi, \eta)$
$|\operatorname{cor}(\xi, \eta)| \le 1$
Рассм ξ и η: $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta = 0$ (от константы не зависит)
$\mathbb{E}(x\xi + y\eta)^2 \ge 0$

$\mathbb{E}(x\xi+y\eta)^2 \geq 0$

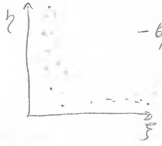
$\mathbb{E}x^2\xi^2 + 2\mathbb{E}x\xi y\eta + \mathbb{E}y^2\eta^2 \geq 0$

$\Rightarrow 4x^2(\mathbb{E}\xi\eta)^2 - 4x^2\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\eta^2 \leq 0$

$\Rightarrow |\mathbb{E}\xi\eta| \leq \sqrt{\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\eta^2}$

$\operatorname{cov}(\xi,\eta) \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi^2\mathbb{D}\eta^2}$

$|\operatorname{cor}(\xi,\eta)| = 1 \Leftrightarrow \xi = a\eta + b$



– вряд ли есть тут зависимость («предельная»)

Важна величина зависимости и её достоверность

$x_1, \dots, x_n$

$\to \hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(x_i < x)$ – эмпирич. ф. распр.

19.09 Предельные теоремы теор. вер.

1. Сх. п.в. (сх. п.н.), с вер. 1

$X_n \xrightarrow{п.в.} X$ 1) $X_1, X_2, \dots$ сх. п.в. к X $P(\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X) = 1$

$P(\omega: \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1$

2. Сх. по вероятности: $X_1, X_2, \dots$ сх. к X по вероятности,

$X_n \xrightarrow{P} X$ если $\forall \varepsilon > 0$ $P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

3. Сх. в среднем порядка $r > 0$:

$X_n \xrightarrow{r} X$ $X_1, X_2, \dots,$ сх. к X в среднем, если $\mathbb{E}|X_n - X|^r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

4. Сх. по распределению: $X_1, X_2, \dots$ сх. к X по распр.,

$X_n \Rightarrow X$ если $F_n(x) \longrightarrow F(x)$ в точках непрерывности F

$(X_n \xrightarrow{P} X)$

5. Слабая сходимость: $X_1, X_2, \dots$ сх. к X слабо, если для $\forall \varphi(X)$ – непр. огр.: $\int \varphi(x)\,dF_n(x) \longrightarrow \int \varphi(x)\,dF(x)$

Взаимосвязь между сходимостями:

$$\begin{tikzcd} \boxed{1} \arrow[dr] & & & \\ & \boxed{2} \arrow[ul, dashed] \arrow[dl, dashed] \arrow[r] & \boxed{4} \arrow[l, dashed, bend left] \arrow[r, leftrightarrow] & \boxed{5} \\ \boxed{3} \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — н.о.р.с.в.

$\exists \mathbb{E}X_i = a < \infty$

Тогда $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{п.н.} a$ } ЗБЧ

$\Rightarrow \overline{X}_n$ — оценка для мат. ожидания

ЦПТ

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — н.о.р.с.в.,

$\exists \mathbb{E}X_i = a < \infty$, $\mathbb{D}X_i = \sigma^2 < \infty$

Тогда $P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x \right) \longrightarrow \Phi(X)$ равномерно по $X \in \mathbb{R}$

$$\Phi(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$Y_n \sim Bi(n,p)$ $\quad Y_n = X_1 + \dots + X_n$ (можно получить знач. <6 или >4)

ЦПТ позволяет исследовать скорость сходимости ЗБЧ

$Y_n = |\overline{X}_n - a|$

$r(n)$: $\frac{Y_n}{r(n)}$ имеет предел, не равный 0 и ∞

Из ЦПТ $r(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} \left| \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i - a \right| = \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - na}{\sqrt{n}} \right|$

$$P\left(\left| \frac{\sum X_i - na}{\sqrt{n}} \right| < x \right) = P\left(\left| \frac{\sum X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} \right| < \frac{x}{\sigma} \right) \longrightarrow \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-x}{\sigma}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - 1, \quad x > 0$$

Посмотрим скорость сходимости в самой ЦПТ.

Нер-во Берри - Эссена:

$$\left|P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) - \Phi(x)\right| \leq \frac{C_0 M^3}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

$$M^3 = \mathbb{E}|x_i - a|^3$$

Если потребовать только $\exists\, \mathbb{E}|x_i|^{2+\varepsilon}$, сходимость ЦПТ будет сколь угодно медленной

Если потребовать $\exists$ момента >3, улучшения не будет

$0{,}4 < C_0 < 0{,}7056$

Правило 3-х σ

Если X распр. норм

$$\mathbb{P}(|X-a| < 3\sigma) \approx 0{,}997 \qquad a = \mathbb{E}X$$

$$\parallel \qquad a - 3\sigma < X < a + 3\sigma$$

$$\Phi(3) - \Phi(-3) = 2\underbrace{\Phi(3)}_{\text{по таблицам}} - 1$$

В реальности:

$$\mathbb{P}(|x-a| < 3\sigma) \approx 0{,}889$$

$$\mathbb{P}(|x-a| \geq 3\sigma) \leq \frac{\mathbb{D}X}{9\sigma^2} = \frac{1}{9} \quad (\text{нер-во Чебышева}) \qquad \mathbb{D}X = \sigma^2$$

Рассм. случай, когда сл вел. не одинаково распр.

ЦПТ:

При выполнении некотор. условий сумма малых сл вел. сходится по распр. к норм. закону

$X_1, X_2, \ldots$ — независ. сл. вел.

$\mathbb{E}X_i = a_i, \quad \mathbb{D}X_i = \sigma_i^2$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \qquad B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

Рассм. $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - A_n}{B_n}$

Обозн. $\mathbb{P}\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - A_n}{B_n} < x\right) = F_n(x)$

Потребуем, чтобы $\forall\ t>0$

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{|x-a_i|>B_n t}|x-a_i|^2\,dF_i \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$ (*) условие Линдеберга

<u>Теорема Линдеберга - Феллера</u>

Если $X_1, X_2, \ldots$ независ., $\exists\ \mathbb{E}X_i = a_i < \infty$, $\mathbb{D}X_i = \sigma_i^2 < \infty$, кроме того выполнено (*), тогда

$\sup\limits_{x}|F_n(x) - \Phi(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ равном. по x

и выполн. условие равномерной предельной малости

$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{1\le i\le n} P(|X_i-a_i|>\varepsilon B_n) = 0 \quad \forall\varepsilon>0$ (**)

(равномерность по i)

$\frac{\sigma_k^2}{B_n^2} \le \varepsilon$ при дост. большом n

$$\sigma_k^2 = \int(x-a_k)^2\,dF_k(x) = \int\limits_{|x-a_k|>B_n t}(x-a_k)^2\,dF_k(x) + \int\limits_{|x-a_k|\le B_n t}(x-a_k)^2\,dF_k(x) \le$$

Заменим $|x-a_k|$ на $B_n t$ $\Rightarrow$ интеграл только увеличится

$$\le \int\limits_{|x-a_k|>B_n t}(x-a_k)^2\,dF_k + B_n^2 t^2\int\limits_{|x-a_k|\le B_n t}dF_k(x) \le \int\limits_{|x-a_k|>B_n t}(x-a_k)^2\,dF_k(x) + B_n^2 t^2$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_k^2}{B_n^2} \le \overbrace{t^2}^{(1)} + \overbrace{\frac{1}{B_n^2}\int\limits_{|x-a_k|>B_n t}(x-a_k)^2\,dF_k(x)}^{(2)}$$

(1) Возьмём $t^2 < \frac{\varepsilon}{2}$

(2) $\frac{1}{B_n^2}\int\limits_{|x-a_k|>B_n t}(x-a_k)^2\,dF_k(x) \le \frac{1}{B_n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_{|x-a_i|>B_n t}(x-a_i)^2\,dF_i(x) \le \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow$ из условия Линдеберга следует, что вклад каждой сл. вел. несравнимо мал по сравнению с общим вкладом

Пусть $\beta_i^3 = \mathbb{E}|x-a_i|^3$, $\quad M^3 = \sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i^3$

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{|x-a_i|>tB_n}(x-a_i)^2\,dF_i(x) = \frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{|x-a_i|>tB_n}(x-a_i)^2\frac{B_n t}{B_n t}\,dF_i(x) \le$$

$$\le \frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{|x-a_i|>tB_n}(x-a_i)^3\,dF_i(x)\cdot\frac{1}{B_n t} \le \frac{M^3}{tB_n^3}$$

Теор. Ляпунова

Для ЦПТ в случае наличия 3 момента необходимо, чтобы $\frac{\mu^3}{B_n^3} \longrightarrow 0$

Разберёмся с условием равн. пред. малости:

$$\mathbb{P}(|x-a_i| > \varepsilon B_n) \cdot \varepsilon^2 B_n^2 = \varepsilon^2 B_n^2 \int\limits_{|x-a_i|>\varepsilon B_n} dF_i(x) \leq$$

$$\leq \int\limits_{|x-a_i|>\varepsilon B_n} |x-a_i|^2 dF_i(x)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(|x-a_i| > \varepsilon B_n) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 B_n^2} \int\limits_{|x-a_i|>\varepsilon B_n} |x-a_i|^2 dF_i \longrightarrow 0 \quad (\text{из } *)$$

Справедлива и следующая теорема:

Если вып. усл. равн. пред. малости и $\sup\limits_x |F_n(x) - \Phi(x)| \to 0$, тогда вып. усл. Линдеберга

(⇒ усл. Линдеберга ещё и необходимо при условии выполнения (**))

26.09 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \longrightarrow a, \quad a = \mathbb{E}\xi_i, \quad \sigma^2 = \mathbb{D}x_i$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - a)}{\sigma} < x\right) \longrightarrow \Phi(x)$$

$$\mathbb{P}(\bar{X}_n < x) \longrightarrow \Phi\left(\frac{(x-a)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{P}(|\bar{x}_n - a| < \varepsilon) = \mathbb{P}(a - \varepsilon < \bar{X}_n < a + \varepsilon) \longrightarrow \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right) - 1$$

$\gamma > 0$ – уровень доверия

$$2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right) - 1 = \gamma \Rightarrow \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right) = \frac{1+\gamma}{2}$$

$$\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma} = U_{\frac{1+\gamma}{2}}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{U_{\frac{1+\gamma}{2}}\sigma}{\sqrt{n}}$$

Погрешность имеет порядок $L = \frac{C_0 \mu}{3^3 \sqrt{n}}$ $\qquad \mu = \mathbb{E}|x_i - a|^3$

$$\underbrace{2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{3}\right) - 1 - 2L}_{} \leq P(a - \varepsilon < \overline{X}_n < a + \varepsilon) \leq 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{3}\right) - 1 + 2L$$

$$2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{3}\right) - 1 - 2L \geq \gamma$$

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{3}\right) \geq \frac{\gamma+1}{2} + L$$

$$\varepsilon \geq u_{\frac{1+\gamma}{2}+L} \frac{3}{\sqrt{n}}$$

$\Rightarrow$ при недостаточно больших n нельзя сказать ничего о точности, т.к. можно показать, что $L > \frac{0{,}4}{\sqrt{n}}$

Если $\frac{1+\gamma}{2} + \frac{0{,}4}{\sqrt{n}} > 1$, т.е $\frac{0{,}4}{\sqrt{n}} > \frac{1-\gamma}{2}$, $\quad \sqrt{n} < 0{,}8(1-\gamma)$

квантиля не будет $\qquad n < 0{,}64(1-\gamma)^2$

$\Rightarrow$ при таких n неприменима аппроксимация ЦПТ

Распределение Пуассона. Теорема Пуассона.

$$X_i \sim \begin{cases} 1, & p \\ 0, & q = 1-p \end{cases}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \sim Bi(n, p)$$

$\mathbb{E}x_i = p, \quad \mathbb{E}S_n = np, \quad \mathbb{D}x_i = pq, \quad \mathbb{D}S_n = npq$

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Теор. Пусть $np = \lambda > 0$, $p \leq \frac{1}{4}$, $k - 1 \leq \frac{n}{4}$

Тогда $P(S_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda + r_n(k)}$, $\quad r_n(k) \leq \frac{k(1-k)}{2n} + \frac{\lambda k}{n}$

$$r_n k \geq \frac{\lambda k}{n} + 2\log\frac{4}{3} \cdot \frac{k(1-k)}{n} - \frac{2\lambda^2}{3n} \sim O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Док-во:

$$P(S_n = k) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \circeq$$

$$\circeq \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)(1-p)^{n-k} e^{np} \right) =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda + r_n(k)}$$

$$r_n(k) = \log\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] + (n-k)\log(1-p) + np =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \log\left(1-\frac{i}{n}\right) + (n-k)\log(1-p) + \lambda \quad ⑤$$

$\log(1-x) < -x, \quad x \in (0,1)$

$$⑤ \; -\sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{n} - \lambda + kp + \lambda = \frac{(1-k)k}{2n} + \frac{k\lambda}{n}$$

$x \in (0; \frac{1}{4})$ – оценить $\log(1-x)$ и $\log(1-x)+x$ (в ряд Тейлора)

получим нижнюю оценку

$$\begin{cases} 1 & p_n \\ 0 & q_n = 1-p_n \end{cases}$$

$X_{1,1}$

$X_{1,2}$

$\vdots$

$X_{m,n} \quad \ldots \quad X_{n,n}$

В каждой серии сл вел. незав

<u>Теор Пуассона</u>

Пусть в с-ме серий $n \to \infty$, $p_n \to 0$, $np_n \to \lambda$

Тогда $\forall k > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(S_n = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

<u>Опр</u> Ф. распр. $G(x)$ наз-ся устойчивой, если для $g(t)$ – характеристич ф-ии $\forall a_1 > 0,\ a_2 > 0 \ \exists b \in \mathbb{R}$ и $a > 0$

т.ч. справедливо: $g(a_1 t) g(a_2 t) = e^{ibt} g(at) \iff$

$$G(a_1 x + b_1) * G(a_2 x + b_1) = G(ax+b)$$

$$\forall a_1, a_2 > 0, \ \forall b_1, b_2 \in \mathbb{R} \qquad \exists a > 0, \ \exists b \in \mathbb{R}$$

Можно показать, что

$$g(t) = \exp\left(iat - c|t|^\alpha \left(1 + ib\frac{t}{|t|} Q(t,\alpha)\right)\right)$$

$$Q(t,\alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}, & \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi}\log|t|, & \alpha = 1 \end{cases}$$

α – характеристический показатель

все невырожд. устойчивые законы абс. непрерывны

Примеры: 1) норм. распр. ($\alpha=2$)

2) распр. Коши ($\alpha=1$)

3) распр. Леви ($\alpha=\frac{1}{2}$)

$$p_{\frac{1}{2}}(x)=\begin{cases}\frac{3}{\sqrt{\pi x^3}}e^{-\frac{3^2}{2x}}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

4) $\begin{cases}p_{\frac{1}{2}}(|x|), & x\le 0\\ 0, & x>0\end{cases}$

Для других устойч. законов неизвестно, как плотность выражается в элем. функциях (и выражается ли)

Устойч. законы - с тяжёлыми хвостами

$\alpha\in(0;2)$ $G_\alpha(x)$ $\underbrace{G_\alpha(-x)+1-G_\alpha(x)}_{\text{сумма хвостов}}\sim\frac{c}{|x|^\alpha}$ $x\to\infty$

$X\sim G_\alpha \Rightarrow \exists\ \mathbb{E}|X|^\gamma,\ \gamma<\alpha$

$\nexists\ \mathbb{E}|X|^\gamma,\ \gamma\ge\alpha$ моменты не определены

Теор. Леви

Пусть $X_1, X_2, \dots$ - н.о.р.с.в.

Тогда $F(x)$ может быть предельной для сумм вида $\frac{X_1+\dots+X_n-a_n}{b_n}$ при некоторых $a_n, b_n>0$

$\Longleftrightarrow$ $F(x)$ устойчиво

Устойч., отрицат. биномиальное, Гамма, распр. Пуассона - безгранично делимые распределения

Опр Характ. ф-ция $f(t)$ безгранично делима, если $\forall n\ \exists f_n(t)$ - хар. ф-ция, т.ч. $f(t)=(f_n(t))^n$

$X\sim f(t)$

$X\overset{d}{=}\sum_{i=1}^n X_i$ $\forall n$, X_i - н.о.р.с.в., хар. ф. $f_n(t)$

Схема серий

$X_{1,1}$

$X_{1,2},\ X_{2,2}$

$\vdots$

$X_{n,1} \dots X_{n,m_n}$

(*) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{1\le j\le m_n} P(|X_{n,j}|>\varepsilon)=0 \quad \forall \varepsilon>0$ – условие равномерной предельной малости

<u>Теор. Хинчина</u>

Пусть выполнено (*). Тогда $F(x)$ может быть предельной для сумм вида $X_{n,1}+\dots+X_{n,m_n}$, $n\to\infty$, $\Leftrightarrow$ $F(x)$ соответствует безгранично делимой хар. ф-ции.

<u>Теор. Пуассона</u>

Пусть выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\le j\le n} p_{n,j} \to 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_{i,n} \to \lambda$

$$\Rightarrow P(S_n=k) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad S_n = X_{n1}+\dots+X_{n,n}$$

<u>Док-во:</u> Рассм. произв. ф-цию X_{in}:

$$\varphi_{i,n}(s) = E s^{X_{in}} = 1-p_{in} + s p_{i,n} = 1+(s-1)p_{i,n}$$

в каждой серии сл. вел. независимы $\Rightarrow \varphi_n(s) = \prod\limits_{i=1}^{n} \varphi_{i,n}(s) = \prod\limits_{i=1}^{n}(1+(s-1)p_{i,n})$

$$\log \varphi_n(s) = \sum_{i=1}^{n} \log(1+(s-1)p_{in})$$

Заметим, что $\sum\limits_{i=1}^{n} p_{in}^2 \le \underbrace{\max\limits_{1\le i\le n} p_{i,n}}_{\to 0} \underbrace{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{i,n}}_{\to\lambda} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow$ при больших n

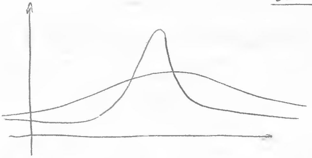
$$\log\varphi_n(s) \sim \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_{in}}_{\to\lambda}(s-1) \xrightarrow{n\to\infty} \lambda(s-1) \quad (\text{остальные члены} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0)$$

$\Rightarrow \varphi_n(s) \longrightarrow e^{\lambda(s-1)}$ – произв. ф-ция распр. Пуассона

ч.т.д.

„Закон малых чисел"

Матем модели информации и неопределённости



плотность

Шэннон Хартли 20-30е гг XX вв

Опр. Пусть A и B - события с $P(A)>0$, $P(B)>0$. Тогда информация (по Шеннону), содерж в B относит. A, это
$I(A/B) = \log \frac{P(A/B)}{P(A)}$
Если $A=B$, то $I(A/B) = I(A/A) = -\log P(A)$

Опр. Пусть A - событие, $P(A)>0$. Информацией (по Шеннону), содерж. в A, наз-ся $I(A) = -\log P(A)$

1. Чем меньше $P(A)$, тем больше $I(A)$
2. Пусть A и B независ, тогда $I(A/B) = \log \frac{P(A/B)}{P(A)} = \log \frac{P(A)}{P(A)} = 0$
3. A и B независ. $\Rightarrow I(AB) = -\log P(AB) = -\log[P(A)P(B)] =$
$= -\log P(A) - \log P(B) = I(A) + I(B)$

Если $\ln \Rightarrow I$ измеряется в nat,
если за единицу инф-ции - в событии A: $P(A) = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow I$ измеряется в bit

E - эксперимент

Исходы $A_1, A_2, \dots, A_n$
вероятности $p_1, p_2, \dots, p_n$

Инф. сл вел. со значениями $I(A_1), \dots, I(A_n)$ с вер. $p_1 \dots p_n$
Обозначим $Q(E)$ - сл. вел. (кол-во инф-ции, полученной в ходе эксперимента E)
$\mathbb{E}Q(E) = \sum_{i=1}^{n} I(A_i)p_i = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$

Опр Энтропией эксперимента E наз-ся $H(E) = \mathbb{E}Q(E) =$
$= -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$
Энтропия - мера неопределённости эксперимента

Теор. $H(E)$ обладает следующими свойствами:

1) $H(E) \geq 0$, $H(E) = 0 \Leftrightarrow \exists i_0 \in \{1..N\}: p_{i_0} = 1$

2) Рассм. эксперимент E_0: $A_1 \ldots A_n$ $p_1 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$

Тогда для E_1 – $\forall$ эксперимента с n исходами $H(E_0) \geq H(E_1)$

3) E: $A_1, \ldots A_n$, $p_1 \ldots p_n$

E_1: получится из E объединением каких-то 2-х исх A_i, A_j

E_2: эксперимент с 2 исходами A_i и A_j с вер. $\frac{p_i}{p_i+p_j}$ и $\frac{p_j}{p_i+p_j}$

Тогда $H(E) = H(E_1) + (p_i + p_j) H(E_2)$.

4) $H(E)$ зависит не от A_i, а от p_i, $i = \overline{1,N}$

5) $H(E)$ – непрерывная функция p_i, $i = \overline{1,N}$

<u>Док-во</u>: 4 и 5 – очевидно

1) $g(p) = -p \log p$ доопределим по непрерывности $g(0) = 0$

$g(p) \geq 0$, $p \in (0;1]$ и равна $0 \Leftrightarrow p = 0$ или $p = 1$

$H(E) = \sum_{i=1}^{n} g(p_i) = 0 \Leftrightarrow g(p_i) = 0 \ \forall i$

$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$; $p_i \geq 0 \ \forall i \Rightarrow p_i = 0$ или $p_i = 1$

Все p_i не могут быть равны 0, не может быть несколько $p_i = 1 \Rightarrow \exists$ ровно один $p_{i_0} = 1$, а остальные $p_i = 0$

2) $H(E_0) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = -\log \frac{1}{n}$

Рассм. $g(x) = x \log x$ на $x \in (0;1)$, $g'(x) = 1 + \log x$

$g''(x) = \frac{1}{x} > 0$

$\Rightarrow g(x)$ выпукла вниз $\Rightarrow \forall \alpha_1, \ldots \alpha_n : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$, $\forall y_1, \ldots, y_n$ из $(0;1)$ справедливо: $g\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(y_i)$ (*)

$H(E_0) = -\log \frac{1}{n} = -\log \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} p_i = \{p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\} =$

$= -n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} p_i \log \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} p_i \geq -n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} p_i \log p_i = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i = H(E_1)$

{в силу (*). $\alpha_i = \frac{1}{n}$, $y_i = p_i$}

3) Покажем, что $H(E) \geq H(E_1)$

$H(E_1) = \sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq j \\ k=1}}^{n} p_k \log p_k - (p_i + p_j) \log(p_i + p_j) = -\sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq j \\ k=1}}^{n} p_k \log p_k -$

$-p_i \log(p_i+p_j) - p_j \log(p_i+p_j) \leq -\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k = H(E)$

$\Rightarrow H(E) - H(E_1) = -p_i \log p_i - p_j \log p_j + (p_i+p_j)\log(p_i+p_j) =$

$= -(p_i+p_j)\left(\frac{p_i}{p_i+p_j}\log p_i + \frac{p_j}{p_i+p_j}\log p_j - \left(\left(\frac{p_i}{p_i+p_j}\right)\log(p_i+p_j) + \right.\right.$

$\left.\left. + \frac{p_j}{p_i+p_j}\log(p_i+p_j)\right)\right) = -(p_i+p_j)\left(\frac{p_i}{p_i+p_j}\log\frac{p_i}{p_i+p_j} + \frac{p_j}{p_i+p_j}\log\frac{p_j}{p_i+p_j}\right) =$

$= -(p_i+p_j)\, H(E_2)$, ч.т.д.

Теор (Фадеев)

Если $H(p_1 \ldots p_n)$ удовлетворяет 1-5, то он имеет вид энтропии: $H(p_1, \ldots p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$

Пусть ξ - сл. вел, $x_1, \ldots x_n$ - конечное число значений, $p_1, \ldots p_n$ - вероятности

$H(\xi) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$

$p(x) = \begin{cases} p_i & x = x_i \\ 0, & x \neq x_i \end{cases} \quad i = \overline{1,n}$

$\Rightarrow H(\xi) = -\mathbb{E}\log P(\xi)$ - энтропия сл. вел ξ

Пусть ξ - абс. непрерывна

$\Rightarrow H(\xi) = -\mathbb{E}\log p(\xi)$, p - плотность ξ

$\exists$ посл-ть $\{\xi_n\}$: $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$, ξ_n - простая сл. вел. (принимает конечное число значений $x_1 \ldots x_n$)

$\xi_n \Rightarrow \xi$ сх-ся поточечно $\Rightarrow$ сх-ся по распределению

Множество значений ξ разобьём на промежутки Δ_i радиуса δ.

$\xi_n = x_1, \ldots, x_n$, $x_1 \in \Delta_1, \ldots, x_n \in \Delta_n$

вероятности $P(\xi \in \Delta_1), \ldots P(\xi \in \Delta_n)$

$H(\xi_n) = -\sum_{i=1}^{n} P(\xi \in \Delta_i)\log P(\xi \in \Delta_i) \overset{\xi_\delta = \xi_n}{=} -\sum_{i=1}^{n} \delta p(x_i^*)\log \delta p(x_i^*) =$

$= -\sum_{i=1}^{n} \delta p(x_i^*)\log p(x_i^*) - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \delta p(x_i^*)}_{= \sum_{i=1}^{n} P(\xi \in \Delta_i) = 1}\log \delta$

$H_\delta = H(\xi_n)$

$\lim\limits_{\delta\to 0}(H_\delta + \log\delta) = H(\xi)$

<u>Опр</u> $H(\xi) = -\mathbb{E}\log p(\xi)$, p - плотность, ξ - абс. непрерывн

дифференциальная энтропия

10.09 <u>Теор.</u>

1) Пусть ξ имеет равн. расп $\xi \sim R[-a;a]$

Тогда $H(\xi) \geqslant H(\eta)$: $\mathbb{P}(|\eta| \leqslant a) = 1$ (η - $\forall$ случ вел)

2) Пусть ξ имеет показат. расп $\xi \sim P(\lambda)$

Тогда $H(\xi) \geqslant H(\eta)$: $\mathbb{P}(\eta \geqslant 0) = 1$, $\mathbb{E}\eta = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda > 0$

3) Пусть ξ имеет норм. распр. $\xi \sim N(a, \sigma^2)$

Тогда $H(\xi) \geqslant H(\eta)$: $\mathbb{E}\eta = a$, $\mathbb{D}\eta = \sigma^2$

<u>Док-во.</u>

<u>Из мет.опт.</u>: пусть $F(x, p(x))$, $\varphi_i(x, p(x))$ - функции, $i = \overline{1,n}$

Тогда $\mathcal{I}(p) = \int\limits_a^b F(x, p(x))\,dx \to \max\limits_p$ при условии

(a, b - нек. числа)

(*) $\int\limits_a^b \varphi_i(x, p(x))\,dx = a_i$ $\Rightarrow$ p удовл ур-ю

(a_i - нек. числа) $\frac{\partial F}{\partial p} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial p} + \dots + \lambda_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial p} = 0$, $\lambda_1 \dots \lambda_n$ - находятся подстановкой реш-я в (*)

1. Возьмём $F(p) = -p\log p$, условие $\varphi(x, p) = p$

$\int\limits_{-a}^{a} \varphi(x, p)\,dx = 1$ (т.к. p - плотность)

Подставим в ур-е: $-(\log p + 1) + \lambda_1 = 0$

$\Rightarrow \log p = \lambda_1 - 1 \Rightarrow p = e^{\lambda_1 - 1}$ - const по x

Подставим в (*): $\int\limits_{-a}^{a} e^{\lambda_1 - 1}\,dx = 1 \Rightarrow 2a e^{\lambda_1 - 1} = 1 \Rightarrow e^{\lambda_1 - 1} = \frac{1}{2a}$

$\Rightarrow \lambda_1 = \log\frac{1}{2a} + 1$

2. $F = -p\log p$, условия $\varphi_1(x, p) = p$, $\varphi_2(x, p) = xp$

$\int\limits_0^\infty \varphi_1(x, p)\,dx = 1$, $\int\limits_0^\infty \varphi_2(x, p)\,dx = \frac{1}{\lambda}$

Подставим: $-(\log p + 1) + \lambda_1 + \lambda_2 x = 0$

$$p = e^{\lambda_1 + \lambda_2 x - 1}$$

Подставим в ⊕: $\int\limits_0^\infty e^{\lambda_1+\lambda_2 x-1}\,dx = 1$

$$\frac{1}{\lambda_2}\int\limits_0^\infty e^{\lambda_2 x}\,d\underbrace{\lambda_2 x}_{-y} = e^{-y}\Big|_0^\infty$$

$$-\frac{1}{\lambda_2}\int\limits_0^\infty e^{-y}dy = -\frac{1}{\lambda_2} \Rightarrow -\frac{e^{\lambda_1-1}}{\lambda_2} = 1 \Rightarrow \lambda_2 = -e^{\lambda_1 - 1}$$

$\int\limits_0^\infty x p(x)dx = \frac{1}{\lambda} \Longrightarrow p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ (интеграл берётся по частям)

3) $F = -p\log p$, условия: пусть $a = 0$, $\varphi_1 = p$, $\varphi_2 = x^2 p$

$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_1 dx = 1$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x,p)\,dx = \sigma^2$

$$-(\log p + 1) + \lambda_1 + \lambda_2 x^2 = 0$$

$$p(x) = e^{\lambda_1 + \lambda_2 x^2 - 1}$$

Подставив в ⊛, получим $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}$ — плотность норм. распр.

ч.т.д.

Так как в случае минимума информации надо предполагать худшее, но при неизвестном распределении можно брать R, P или N.

Опр. Семейство случ. величин $X(t;\omega)$, опр. на одном базовом вер. пр-ве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $t \in T \subset R$ наз-ся сл. процессом.

$X_1, X_2, \ldots$ — посл. сл. вел. — тоже сл. процесс с дискретным временем
$T \subset \{\ldots \pm 1, 0, \pm 1, \ldots\}$

T — интервал $\Rightarrow X(t)$ — сл. процесс с непрерывным временем

Пусть надо найти $P(a < X(t) < b,\ t \in [t_1, t_2])$

$$\{\max_{[t_1,t_2]} X(t) < b\} = \bigcap_{[t_1,t_2]} \{X(t) < b\}$$

$$\| $$

$$\bigcap_{\substack{\text{счётн. мн-во} \\ [t_1,t_2]}} \{X(t) < b\}$$

При фикс. ω_0 $X(t,\omega_0)$ – траектория случ. процесса

$X(t) \longrightarrow S$ – мн-во всех траекторий сл. процесса

На S можно определить борелевскую σ-алгебру Σ – она порождается мн-вом всех открытых подмн-в S

$X(t): \Omega \longrightarrow S$ прообраз $\forall B \in \Sigma$ – событие

Опр Распределением случ. процесса наз-ся мера P_x, заданная как $\forall A \in \Sigma$ $P_x(A) = P(\omega: X(t) \in A)$

При фикс. $t_0, t_1, \dots t_n$ получаем $\{x(t_0), x(t_1) \dots x(t_n)\}$ – вектор.

Распр. $\{X(t_0), X(t_1) \dots, X(t_n)\}$ – конечномерное распределение случ. процесса

Опр Процесс $X(t)$ – процесс с независ. приращением, если $\forall t_0, t_1, \dots, t_n \in T$: $X(t_0)$, $X(t_1)-X(t_0), \dots$ $X(t_n)-X(t_{n-1})$ – независимы в совокупности $(t_0 \le t_1 \le \dots \le t_n)$

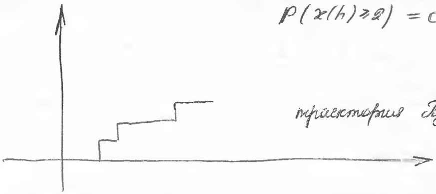
Опр Сл. процесс $X(t)$ – однородный, если распр. $X(t+h)-X(t)$ совпадает с распр. $X(s+h)-X(s)$ $\forall t, s, h$: $t, t+h, s, s+h \in T$

Опр. Процесс $X(t)$ наз-ся Пуассоновским, если

1) $X(t)$ имеет независ. приращения
2) $X(t)$ однородный
3) $X(0)=0$ почти наверно
4) При $h \downarrow 0$, $h>0$ $P(x(h)=0) = 1-\lambda h + o(h)$

$P(x(h)=1) = \lambda h + o(h)$

$P(x(h) \geq 2) = o(h)$ $\lambda > 0$



траектория Пуассоновского процесса (в случ. моменты вр. скачки на 1)

Найдём распр $X(t)$ в любой момент t

$\varphi_{X(t)}(s)$ – производящая функция

$$\varphi_{x(t+h)}(s) = \mathbb{E}s^{x(t+h)} = \mathbb{E}s^{x(t+h)-x(t)+x(t)} = \mathbb{E}s^{x(t+h)-x(t)} \cdot \mathbb{E}s^{x(t)} =$$

$$= \varphi_{x(h)}(s) \cdot \varphi_{x(t)}(s)$$

$$\varphi_{x(h)}(s) = 1-\lambda h + o(h) + s(\lambda h + o(h)) + o(h) = 1-\lambda h + s\lambda h + o(h)$$

Рассм. $\dfrac{\varphi_{x(t+h)}(s) - \varphi_{x(t)}(s)}{h} = \lambda(s-1) + o(1)$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_t(s)}{\partial t} = \lambda(s-1) \\ &\varphi_0(s) = 1 \end{aligned}\right| \Rightarrow \varphi_t(s) = e^{\lambda t(s-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} s^k$$

$\Rightarrow x(t) \sim \Pi(\lambda t)$

$\mathbb{E}X(t) = \mathbb{D}X(t) = \lambda t$

$\Rightarrow \lambda$ имеет смысл среднего числа скачков за ед. времени

Пуассоновский процесс

17.10

1. $X(0) = 0$ п.н.
2. Незав. приращения
3. Однородный
4. $h \downarrow 0$ $h > 0$ $\mathbb{P}(X(h) = 0) = 1 - \lambda h + \bar{o}(h)$

$$\mathbb{P}(X(h) = 1) = \lambda h + \bar{o}(h)$$
$$\mathbb{P}(X(h) \geq 2) = \bar{o}(h)$$

$\varphi_t(s) = \mathbb{E}s^{X(t)}$ $|s| \leq 1$

$$\frac{\partial \varphi_t(s)}{\partial t} = \lambda(s-1)\varphi_t(s)$$
$$\to \varphi_t(s) = e^{\lambda t(s-1)}$$

$$\mathbb{P}(X(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

$$\mathbb{E}X(t) = \mathbb{D}X(t) = \lambda t$$

$\tau_1, \ldots \tau_n$ - моменты скачков Пуассон процесса

$\tau_j - \tau_{j-1}$ - ?

$\tau_1 - \underset{\overset{\|}{0}}{\tau_0} = \tau_1$

$P(\tau_1 \le t)$ - ?

Рассм событие $\{\tau_1 > t\} = \{X(t) = 0\} \Rightarrow$

$$P(\tau_1 \le t) = 1 - P(\tau_1 > t) = 1 - P(X(t) = 0) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$\Rightarrow$ $\tau_1 \sim$ показат распр. с параметром λ

T - время жизни

Нас интересует событие $\{T > t+s / T > s\}$

$U(t) = P(T > t)$

$$U(t|S) = \frac{P(T > t+s, T > s)}{P(T > s)}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(T > t+s, T > s) = P(T > t+s) \\ P(T > s) = U(S) \end{array}\right| \Rightarrow U(t|S)\,U(S) = U(t+s)$$

$U(t|S) \overset{?}{=} U(t)$ при наших условиях это верно?

$U(t)U(S) = U(t+S)$

$\Rightarrow U(t) = e^{-\alpha t}$ (Феллер) (и только такие решения)

Распределение обладает свойством отсутствия памяти $\Leftrightarrow$ оно показательно

Зафикс. $[a; b]$ на временной оси

Пусть в $[a; b]$ попало n скачков Пуассон процесса

Распределение скачков на $[a; b]$?

<u>Теор</u> Усл. распр $\tau_1, \ldots, \tau_n$ при условии, что $X(b) - X(a) = n$, совпадает с распр. вариационного ряда, построенного по выборке из равномерного распределения на $[a; b]$

Пусть $(\eta_1 \ldots \eta_n)$ - сл. вектор, есть плотность

Тогда $P(\eta_j \in [t_j, t_j + h], j = \overline{1,n}) = f_{\eta_1 \ldots \eta_n}(t_1, \ldots t_n)h^n + \bar{o}(h^n)$

РГ

Док-во: $P(\tau_j \in [t_j, t_j+h]\ \ j=\overline{1,n} \mid X(b)-X(a)=n) =$

$$= \frac{P(\tau_j \in [t_j; t_j+h],\ j=\overline{1,n},\ X(b)-X(a)=n)}{P(X(b)-X(a)=n)}$$

Пусть $a = t_0 + h < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = b$

$$h < \min_j (t_j - t_{j-1})$$

$P(\tau_j \in [t_j, t_j+h],\ j=\overline{1,n},\ X(b)-X(a)=n) =$

$= P(\tau_j \in [t_j, t_j+h]\ \ j=\overline{1,n}) = P(X(t_j+h)-X(t_j)=1,\ j=\overline{1,n},$

$X(t_j)-X(t_{j-1}+h)=0,\ j=\overline{1,n+1}) = \{e^{-\lambda hn}\cdot(\lambda h)^n\}$

$\times\, e^{\underbrace{-\lambda(t_1-a+t_2-t_1+\dots+b-t_n)}_{-\lambda(b-a-hn)}} = (\lambda h)^n e^{-\lambda(b-a)}$

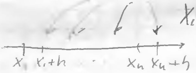
$$P(X(b)-X(a)=n) = e^{-\lambda(b-a)}\frac{(\lambda(b-a))^n}{n!}$$

$\Rightarrow P(\tau_j \in [t_j, t_j+h],\ j=\overline{1,n} \mid X(b)-X(a)=n) = \dfrac{h^n \cdot n!}{(b-a)^n}$

$f_{\tau_1\dots\tau_n|n}(t_1,\dots t_n) = \dfrac{n!}{(b-a)^n},\qquad t_i \in [a,b]$

$f_{1\dots n}(x_1 \dots x_n) = n!\prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ — плотность вариац. ряда

$X_i \sim f(x)$



$\dfrac{n!}{(b-a)^n}\, I[t_j \in [a,b],\ j=\overline{1,n}]$ — плотность вариац. ряда, построенного по выборке из р/м распр-я на $[a,b]$

ч.т.д.

$\xi_j = \tau_j - \tau_{j-1}$

$\xi_1 = \tau_1, \quad \tau_2 = \xi_1+\xi_2, \quad \dots, \quad \tau_n = \xi_1+\dots+\xi_n$

$P(\tau_j \in [t_j, t_j+h],\ j=\overline{1,n}) = (h\lambda)^n e^{-\lambda(b-a)}$

$b = t_n + h, \quad a = h$

$p_{\tau_1\dots\tau_n}(t_1, \dots t_n) = \lambda^n e^{-\lambda t_n}$

$P(\tau_1 < t_1, \dots, \tau_n < t_n) = \int\limits_{u_1<t_1}\dots\int\limits_{u_n<t_n} p_{\tau_1\dots\tau_n}(u_1, \dots u_n)\,du_1 \dots du_n =$

$= P(\xi_1 < t_1, \dots, \xi_1+\dots+\xi_n < t_n) \ (=)$

$$= \int\limits_{v_1 < t_1} \dots \int\limits_{v_1+\dots+v_n < t_n} p_{\xi_1 \dots \xi_n}(v_1 \dots v_n)\, dv_1 \dots dv_n$$

Замена: $\begin{cases} u_1 = v_1 \\ \dots \\ u_n = v_1 + \dots + v_n \end{cases}$ якобиан $= 1$

$$p_{\xi_1 \dots \xi_n}(u_1 \dots u_n) = p_{\tau_1 \dots \tau_n}(u_1, \dots, u_1 + \dots + u_n)$$

$$p_{\xi_1 \dots \xi_n}(u_1, \dots, u_n) = \lambda^n e^{-\lambda(u_1 + \dots + u_n)} = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda u_i}, \quad u_i \geq 0$$

Теор. $P\left(\frac{X(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} < x\right) \underset{\lambda t \to \infty}{\Longrightarrow} \Phi(x)$ – ф. распр. станд. $N(0,1)$

Сходимость равномерна по x

$$\Delta(\lambda t) = \sup_x \left| P\left(\frac{X(t) - \lambda(t)}{\sqrt{\lambda t}} < x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C_0}{\sqrt{\lambda t}}$$

C_0 – константа Берри-Эссена

Док-во: $\varphi_t(s) = \mathbb{E} e^{isX(t)} = e^{\lambda(e^{is} - 1)}$ $\{t \cdot n\} =$

$$= \left(e^{\frac{\lambda t}{n}(e^{is} - 1)}\right)^n$$

$$X(t) \overset{d}{=} X_{n,1}(t) + \dots + X_{n,n}(t) \qquad X_{n,i} \sim \Pi\left(\frac{\lambda t}{n}\right)$$

$n > \lambda t$

По нер-ву Берри-Эссена

$$\Delta(\lambda t) \leq \frac{C_0}{\sqrt{n}} \frac{E\left|X^{(t)}_{n,1} - \frac{\lambda t}{n}\right|^3}{\mathbb{D}(X^{(t)}_{n,1})^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathbb{E}\left|X_{n,1}(t) - \frac{\lambda t}{n}\right|^3 = \sum_{i=0}^{\infty} \left|i - \frac{\lambda t}{n}\right|^3 \mathbb{P}(X_{n,1}(t) = i) =$$ (т.к. отриц. член только при $i=0$)

$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \left(i - \frac{\lambda t}{n}\right)^3 \mathbb{P}(X_{n,1}(t) = i)}_{\overset{\parallel}{\frac{\lambda t}{n}} \text{ (док-ть)}} + 2\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^3 e^{-\frac{\lambda t}{n}} =$$

$$= \frac{\lambda t}{n} + 2\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^3 e^{-\frac{\lambda t}{n}} \leq \frac{\lambda t}{n}\left(1 + 2\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^2\right)$$

$$\mathbb{D} X_{n,1}(t) = \frac{\lambda t}{n}$$

$$\Rightarrow \Delta(\lambda t) \leq \frac{C_0}{\sqrt{\lambda t}}\left(1 + 2\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^2\right) \qquad n \text{ – любое}$$

$$\Rightarrow \Delta(\lambda t) \leq \frac{C_0}{\sqrt{\lambda t}}$$

ч.т.д.

$\lambda(t)$ — интенсивность зависит от t (предположим)
$\lambda(t)$ — сл. величина

24.10

Случайные суммы

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — н.о.р.с.в.,
N — целочисл. неотриц. сл. вел.,
$N, X_1, X_2, \ldots$ определены на одном (Ω, A, P) и независимы.
Тогда случ. суммой S_N назовем
$$S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \ldots + X_{N(\omega)}(\omega)$$
Обозн. $F(x)$ — ф-ция распр. X_i,
$p(x)$ — плотность X_i,
$f(t)$ — характ. ф-ция X_i,
$\psi(s)$ — производящая ф-ция N,
$\psi(s) = \mathbb{E}S^N \quad |s| < 1$ —

Положим $\sum\limits_{k=1}^{0} \equiv 0$

Свойства случ. сумм

Теор 1
1) $F_{S_N}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x)$

$p_n = \mathbb{P}(N=n), \quad n = 0, 1, \ldots$
$F^{*n}(x)$ = n-кратная свертка F,
F^{*0} — ф.р. с единичным скачком в нуле

2) Если $p_0 > 0 \Rightarrow F_{S_N}$ не явл-ся абс. непрерывной, даже если X_i — абс. непрерывна;
если $p_0 = 0 \Rightarrow \exists\, p_{S_N}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n p^{*n}(x)$ — плотность, где $p^{*n}(x)$ — n-кратная свёртка $p(x)$

3) $f_{S_N}(t) = \psi(f(t))$

4) $\mathbb{E}S_N = \mathbb{E}N\,\mathbb{E}X_1$
$\mathbb{D}S_N = \mathbb{D}N \cdot (\mathbb{E}X_1)^2 + \mathbb{E}N \cdot \mathbb{D}X_1$

Док-во:

1) $F_{S_N}(x) = \mathbb{P}(S_N < x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_N < x / N=n)\,\mathbb{P}(N=n) =$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n < x) p_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x) p_n$

2) $\sum p_n = 1$ ряд сх-ся равномерно

$\Rightarrow p_{S_N}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p^{*n}(x) p_n$ (продифференцировали)

3) $f_{S_N}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_{S_N}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\sum\limits_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x) p_n \ominus$

$\left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF^{*(n)}(x) = f^n(t) \right\}$

$\ominus \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n f^n(t) = \psi(f(t))$

$\left\{ \mathbb{E} s^N = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n s^n \right\}$

4) $\mathbb{E}S_N = f'_{S_N}(t) = \frac{1}{i} \frac{\partial f_{S_N}(t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{i} \underbrace{\frac{\partial \psi(f(t))}{\partial f}}_{\mathbb{E}N} \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{i\mathbb{E}X_1}\Big|_{t=0} = \mathbb{E}N\cdot\mathbb{E}X_1$

$\mathbb{E}S_N^2 = -\frac{\partial^2 f_{S_N}(t)}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi(f(t))}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial t}\right)\Big|_{t=0} =$

$= -\frac{\partial \psi(f(t))}{\partial f} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi(f(t))}{\partial f^2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2\Big|_{t=0} =$

$= \mathbb{E}X_1^2\, \mathbb{E}N + (\mathbb{E}X_1)^2\, \mathbb{E}(N(N-1)) = \mathbb{D}X_1\, \mathbb{E}N + (\mathbb{E}X_1)^2\, \mathbb{E}N^2$

$\mathbb{D}S_N = \mathbb{E}S_N^2 - (\mathbb{E}S_n)^2 = \mathbb{D}N(\mathbb{E}X_1)^2 + \mathbb{E}N\,\mathbb{D}X_1$

c.m.g.

Частные случаи случ. сумм

- Пуассоновская случ. сумма

$\exists N \sim \Pi(\lambda)$

Теор. 2 1) $f_{S_N}(t) = e^{\lambda(f(t)-1)}$ – хар. ф. $S_N \Rightarrow S_N$ безгранично делима

2) $\mathbb{E}S_N = \lambda\mathbb{E}X_1$

$\mathbb{D}S_N = \lambda(\mathbb{E}X_1^2)$ $(\mathbb{E}N = \mathbb{D}N = \lambda)$

$\forall n \quad f_{S_N}(t) = g_n(t)$

$g_n(t) = e^{\frac{\lambda}{n}(f(t)-1)} \quad - X_1 + \dots X_{N_n} \qquad N_n \sim \Pi(\frac{\lambda}{n})$

S_N – обобщ. пуассон. случ. величина

Теор. 3 Пусть $\mathbb{E}X_1 = a$, $\mathbb{D}X_1 = \sigma^2$, $X_1, X_2, \dots$ – н.о.р.с.в.

Пусть $N \sim \Pi(\lambda)$, $N, X_1, X_2, \dots$ независ. $\forall \lambda > 0$

Тогда при $\lambda \to \infty$ $\quad S_\lambda = X_1 + \dots + X_{N_\lambda}$

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x\right) \longrightarrow \Phi(x)$$

сх. равномерно по x

Если $\exists\ \mathbb{E}|X_1|^3 < \infty$, то $\sup\limits_x \left|\mathbb{P}\left(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x\right) - \Phi(x)\right| \le \frac{L C_0}{\sqrt{\lambda}}$

$L = \frac{E(X_1)^3}{(a^2+\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}$, C_0 – константа Б-Э

(аналог нер-ва Берри-Эссеена)

- Геометрич. случ. суммы

$N \sim Geom(p) \Rightarrow X_1 + \dots + X_N$ – геометр. случ. сумма

$N, X_1, X_2, \dots$ независимы, $X_1, X_2, \dots$ – н.о.р.с.в.

$\mathbb{E}N = \frac{1-p}{p}$, $\quad \mathbb{D}N = \frac{1-p}{p^2}$, $\quad \psi_N(s) = \frac{p}{1-(1-p)s}$

$\mathbb{P}(N = n) = p(1-p)^n$, $\quad n = 0, 1, \dots$

Теор. 4 (Реньи)

Пусть $\mathbb{E}X_i = a$, $\quad N \sim Geom(p)$

Обозн. $G(x) = (1 - e^{-x}) I(x \ge 0)$ (станд. показ. закон)

$\mathbb{P}(\frac{p}{a} S_N < x) \xrightarrow[p \to 0]{} G(x)$ равномерно по x

Если $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$, $\quad \mathbb{D}X_1 = \sigma^2$, то

$$\sup_x \left|\mathbb{P}\left(\frac{p}{a} S_N < x\right) - G(x)\right| < \frac{p\sigma^2}{(1-p)a^2}$$

Связь между геометрич. случ. суммами и пуассон. случ. суммами

<u>Лемма 1</u> Пусть M - обобщ. целочисл. пуассон. случ. вел., $X_1, X_2, \dots$ - н.о.р.с.в. $M, X_1, X_2, \dots$ - независимы

Тогда S_M - пуассон. случ. сумма

<u>Док-во:</u> $\psi_M(s) = \varphi(\psi(s)) = e^{\lambda(\psi(s)-1)}$

$f_{S_M}(t) = \psi_M(f(t)) = e^{\lambda(\psi(f(t))-1)}$

$\Rightarrow f_{S_M}(t)$ по теор. 1 и 2 соотв. расп. $Y_1+\dots+Y_N$,

$N \sim \Pi(\lambda)$, Y_i - имеют хар. ф-цию $\psi(f(t))$

$X_1+\dots+X_n \overset{d}{=} Y_1+\dots+Y_N$

$Y_i \overset{d}{=} X_1+\dots+X_L$, L - произв. ф-ция $\psi(s)$

(по теор. 1)

<u>Лемма 2</u> Пусть $M \sim Geom(p) \Rightarrow M$ - обобщ. пуасс. сл. вел

<u>Док-во:</u>

Пусть $\psi_M(s) = \dfrac{p}{1-(1-p)s}$

Обозн. $\lambda = \log\frac{1}{p}$

$\psi(s) = \dfrac{1}{\lambda}\log\dfrac{1}{1-(1-p)s}$

Покажем, что $\psi_M(s) = e^{\lambda(\psi(s)-1)}$

Подставим: $e^{\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\log\frac{1}{1-(1-p)s}-1\right)} = e^{\log\frac{1}{1-(1-p)s}-\lambda} =$

$= \dfrac{1}{1-(1-p)s}e^{-\lambda} = \dfrac{p}{1-(1-p)s}$

Покажем, что $\psi(s)$ - производ. ф-ция

$\psi(s) = \dfrac{1}{\lambda}\log\dfrac{1}{1-(1-p)s} = \dfrac{1}{\lambda}\sum\dfrac{((1-p)s)^k}{k}$

$\log(1-x) = -\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^k}{k}$

$\dfrac{(1-p)^k}{k} > 0$

$\dfrac{1}{\lambda}\sum\dfrac{(1-p)^k}{k} = 1$ (т.к. $\lambda = \log\frac{1}{p}$)

$\Rightarrow \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{(1-p)^k}{k}$, $k=1,2\dots$ задаёт набор вероятностей.

Такое распр. наз-ся распределением логарифмического ряда

$\Rightarrow$ $\psi(s)$ – производящая ф-ция такого распр-я

Теор. 5 $\forall$ геометрич. случ. сумма является пуассон. случ. суммой, причём если $S_M = X_1 + \ldots + X_M$, где $M \sim Geom(p)$ то $S_M \overset{d}{=} Y_1 + \ldots + Y_N$, $N \sim \Pi(\lambda)$, $\lambda = \log \frac{1}{p}$

$$Y_1 \sim f_{Y_1}(t) = \frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{1-(1-p)f(t)}$$

$Y_i \overset{d}{=} X_1 + \ldots + X_L$, где X_i имеют хар. ф. $f(t)$, L имеет распр. логарифмич. ряда, т.е

$$\mathbb{P}(L = k) = \frac{1}{\log \frac{1}{p}} \cdot \frac{(1-p)^k}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Следствие 1 Пусть S_N – пуасс. случ. сумма, $N \sim \Pi(\lambda)$, 31.10
$X_i \sim f(t)$. Пусть $g(t) = \dfrac{1 - e^{-\lambda f(t)}}{1 - e^{-\lambda}}$ явл. характ ф-цией.
$\Rightarrow$ S_N – геометрич. случ. сумма, причём
$S_N \overset{d}{=} Y_1 + \ldots + Y_M$, $M \sim Geom(e^{-\lambda})$, $Y_i \sim g(t)$ (хар. ф.)

Док-во:

$$f_{S_N}(t) = e^{\lambda(f(t) - 1)}$$

Треб. показать, что $f_{S_N}(t) = \psi_M(g(t))$, ψ_M – произв. ф-ция геом. распр. $(e^{-\lambda})$, тогда по теор. о случ. суммах всё доказано

$$\frac{e^{-\lambda}}{1 - (1 - e^{-\lambda}) g(t)} = \frac{e^{-\lambda}}{1 - (1 - e^{-\lambda})\left(\frac{1 - e^{-\lambda f(t)}}{1 - e^{-\lambda}}\right)} = e^{\lambda f(t) - \lambda} = e^{\lambda(f(t) - 1)}$$

ч.т.д.

Следствие 2 $\forall$ геометр. случ. сумма безгранично делима

Док-во:

$$f_{S_M}(t) = e^{\lambda(\psi(f(t)) - 1)} \sim \quad (\psi \text{ - произв. ф., соотв. логарифм. распр})$$

$$\sim Y_1 + \ldots + Y_N, \quad N \sim \Pi(\lambda), \quad Y_i \sim \psi(f(t)))$$

$$e^{\lambda(\psi(f(t)) - 1)} = \Big(\underbrace{e^{\frac{\lambda}{n}(\psi(f(t)) - 1)}}\Big)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

обозн. $g_n(t) \sim$ х.ф. $Y_1 + \ldots + Y_L$, $Y_i \sim \psi(f(t))$, $L \sim \Pi\left(\frac{\lambda}{n}\right)$

$\Rightarrow$ $f_{S_M}(t) = (g_n(t))^n$, где $g_n(t)$ – хар ф-ция

$\Rightarrow$ по опр безгр делимости $f_{S_M}(t)$ безгр. делима

ч.т.д.

Вспомним предельные теоремы:

Теор. Пуассона

S_n: $n \to \infty$, $p_n \to 0$, $np_n \to \lambda$

$S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $X_i \sim \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}$

$\Rightarrow S_n \longrightarrow \Pi(\lambda)$

Схема серий (послед-ть послед-тей

$\{x_{n,j}\}$ при фикс. n X_{n_j} – посл. н.о.р.с.в.

Теор. Хинчина:

Ф. распр. $F(x)$ с хар. ф. $f(t)$ может быть предельной для суммы S_{n,k_n} в схеме серий при условии равномерной предельной малости X_{n_j}, т.е. $\forall \varepsilon > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_j P(|X_{n_j}| > \varepsilon) = 0 \iff f(t)$ – безгранично делима

Св-во безгр. делимых распр

Если х.ф. $f(t)$ безгр. делима, то она нигде не обр в ноль ($f(t) \neq 0 \ \forall t$)

Теорема переноса

Пусть $\{x_{n_j}\}$ – схема серий, т.е. $X_{n_1}, X_{n_2}, \ldots$ н.о.р.с.в,

N_n – положит. целочисл. случ вел., не завис от $X_{n_1}, \ldots$

m_n – безгр возрастающая посл-ть нат. чисел

$$\left.\begin{array}{l} \text{Если } P(S_{n,m_n} < x) \Rightarrow H(x) \\ P(N_n < m_n x) \Rightarrow A(x) \end{array}\right| \Rightarrow P(S_{n,N_n} < x) \Rightarrow F(x),$$

где $F(x) \sim$ хар. ф-ции $f(t)$, $f(t) = \int\limits_0^\infty h^u(t)\, dA(u)$, $h(t)$ – х.ф. соотв H

Замечания $\frac{N_n}{m_n} \Rightarrow U \sim A(x)$,

если $\frac{N_n}{m_n} \Rightarrow 1 \Rightarrow f(t) = \int\limits_0^\infty h(t)\, dA(u) = h(t) \to$ предел случ сумм совпадает с пределом неслуч. сумм

Док-во: $g_n(t) = \mathbb{E} e^{itX_{n+1}}$

$h_n(t) = g_n^{m_n}(t)$ - хар. ф-ция $X_1 + \ldots + X_{m_n}$

$A_n(x) = \mathbb{P}(N_n < m_n x)$

$f_n(t) = \mathbb{E} e^{itS_{n,N_n}}$ - хар. ф. S_{n,N_n}

$$f_n(t) = \mathbb{E} e^{it\sum_{k=1}^{N_n} X_{n,k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_n = k)\, \mathbb{E} e^{it\sum_{j=1}^{k} X_{n,j}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_n = k)\, g_n^k(t) = \int_0^\infty g_n^u(t)\, dP(N_n < u) =$$

$$= \int_0^\infty g_n^{um_n}(t)\, dP(N_n < m_n u) = \int_0^\infty h_n^u\, dA_n(u)$$

Требуется показать, что $\forall t$

$$|f_n(t) - f(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$|f_n(t) - f(t)| = \int_0^\infty h_n^u(t)\, dA_n(u) - \int_0^\infty h^u(t)\, dA(u) \leq$$

$$\leq \left| \int_0^\infty h_n^u(t)\, dA_n(u) - \int_0^\infty h^u(t)\, dA_n(u) \right| +$$

$$+ \left| \int_0^\infty h^u(t)\, dA_n(u) - \int_0^\infty h^u(t)\, dA(u) \right| = I_1(n) + I_2(n)$$

$$I_2(n) = \left| \int_0^\infty h^u(t)\, dA_n(u) - \int_0^\infty h^u(t)\, dA(u) \right|$$

Обозн. N - сл. вел. с ф. расп. $A(x)$

По усл. $\frac{N_n}{m_n} \Rightarrow N$ (слабо сх-ся), т.е. $\forall \varphi(z)$ - непр. огранич. ф-ция

$$\mathbb{E}\varphi\left(\frac{N_n}{m_n}\right) \to \mathbb{E}\varphi(N)$$

$\varphi(z) = z^u$, $|z| < 1$ - непр. и огр. ф-ция

$\Rightarrow \varphi(h(t)) = h^u(t) \Rightarrow I_2(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (разность мат. ожиданий)

$$I_1(n) = \left| \int_0^\infty h_n^u(t)\, dA_n(u) - \int_0^\infty h^u(t)\, dA_n(u) \right| = \{\forall M > 0\} =$$

$$= \left| \int_0^M h_n^u(t)\, dA_n(u) - \int_0^M h^u(t)\, dA_n(u) + \int_M^\infty (h_n^u(t) - h^u(t))\, dA_n(u) \right| =$$

$$= |I_{11}(n) + I_{12}(n)| \leq |I_{11}(n)| + |I_{12}(n)|$$

Рассм. $|I_{12}(n)| = \left| \int_M^\infty (h_n^u(t) - h^u(t))\, dA_n(u) \right|$

Опр Семейство ф. распр. $\{F_n\}$ наз-ся слабо компактным, если из $\forall$ подпосл-ти $\{F_n\}$ можно выделить послед-ть, которая слабо сх-ся к $F \in \{F_n\}$

Опр. Семейство $\{F_n\}$ наз-ся плотным, если

$$\lim_{M\to\infty} \sup_n P(|X_n|>M) = 0, \quad X_n \sim F_n, \quad P(|X_n|>M) = F_n(-M)+1-F_n(M)$$

т.е. хвосты убывают одинаково быстро

Частный случай теор. Прохорова:

Семейство $\{F_n\}$ слабо компактно $\Leftrightarrow$ $\{F_n\}$ плотно

$A_n(u)$ – слабо компактно $\Rightarrow$ по теор. Прохорова

$$\lim_{M\to\infty} \sup_n P(|N_n|>M) = 0$$

$$|I_{12}(n)| \le \Big| \int_M^{\infty} \underbrace{|h_n^u(t)|}_{\le 1} dA_n(u) + \int_M^{+\infty} \underbrace{|h^u(t)|}_{\le 1} dA_n(u) \le 2\int_M^{\infty} dA_n(u) < \varepsilon$$

$$|I_{11}(n)| = \Big| \int_0^M h_n^u(t)\, dA_n(u) - \int_0^M h^u(t)\, dA_n(u) \Big| \le \int_0^M |h_n^u(t) - h^u(t)|\, dA_n(u) \ (\le)$$

Лемма $|\psi(b)-\psi(a)| \le |b-a| \sup\limits_{0\le\alpha\le 1} |\psi'(\alpha a+(1-\alpha)b)|$

Возьмем в качестве $\psi(z) = z^u \Rightarrow \psi'(z) = u z^{u-1}$

$$(\le) \int_0^M u\,|h_n(t)-h(t)| \sup_{0\le\alpha\le 1} |\underbrace{\alpha h_n(t) + (1-\alpha)h(t)}_{\le 1}|^{u-1} dA_n(u) \le$$

($\Rightarrow$ sup дости при $u=0$)

$$\le \int_0^M u(h_n(t)-h(t)) \frac{1}{\sup\limits_{0\le\alpha\le 1} |\alpha h_n(t) + (1-\alpha)h(t)|} dA_n(u) \ (\le)$$

По теор. Хинчина $h(t)$ безгр делима $\Rightarrow$ $h(t) \ne 0$ $\forall t$

Т.к. $h_n(t) \to h(t)$, то $\forall n>n_0$ $h_n(t)\ne 0$

$$\Rightarrow \sup_{0\le\alpha\le 1} |\alpha h_n(t) + (1-\alpha)h(t)| \ge \min(|h_n(t)|, |h(t)|) \ge \delta > 0, \quad n>n_0$$

$$\leq \int_0^M \frac{u|h_n(t)-h(t)|}{\delta}\, dA_n(u) \leq \frac{M}{\delta}|h_n(t)-h(t)| \underbrace{\int_0^M dA_n}_{\leq 1} \leq$$

$$\leq \frac{M}{\delta}|h_n(t)-h(t)| < \varepsilon \quad (\text{т.к. } h_n(t) \to h(t))$$

ч.т.д.

Теор. Пусть сл. вел. Y, U, V таковы, что (7.11)

$\exists \{m_n\}$ — возр. посл-ть нат. чисел, а также посл-ти $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$ веществ. чисел, что

$S_{n,m_n} - a_n \Rightarrow Y \sim H(x)$ и хар.ф. $h(t)$ (*)

$\frac{N_n}{m_n} \Rightarrow U$, (**)

$a_n \frac{N_n}{m_n} - c_n \Rightarrow V$ (***)

Тогда $S_{n,N_n} - c_n \Rightarrow Z$, хар.ф. $Z \sim f(t)$,

$$f(t) = \mathbb{E}\left(h^U(t) e^{itV}\right)$$

$$f(t) = \mathbb{E}h^U(t)$$

Если предел (***) не случаен $\Rightarrow$ ситуация теор. переноса

$a_n \frac{N_n}{m_n} - c_n \to \beta \Rightarrow f(t) = e^{it\beta}\mathbb{E}h^U(t)$

Если предел (**) не случаен, то

$f(t) = \mathbb{E}h^\gamma(t) e^{itV} = h^\gamma(t)\mathbb{E}e^{itV}$

(Пусть $\gamma = 1 \Rightarrow f(t) = h(t)g(t)$, где $g(t)$ — хар ф V

Произведение хар ф-ций соотв. свёртке ф-ций распр-я:

$f(t) \sim F(x) = \int H(x-y)\, dG(y)$, — сдвиговая смесь

$G(y)$ — ф. расп. соотв. $g(t)$)

Теор. Пуассона для нецентр. сумм

$\{X_{n,j}\}$ — посл серий $X_{n,j} \sim \begin{cases} 1, & p_n \\ 0, & 1-p_n \end{cases}$

$p_n \cdot n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \Rightarrow P(S_n = k) \longrightarrow \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

Теор Пуассона для случ сумм

$$S_{p_n} = \sum_{j=1}^{N_{p_n}} X_{n,j}, \qquad X_{n,j} \sim \begin{cases} 1, & p_n \\ 0, & 1-p_n \end{cases}$$

/ N_{p_n} - кол-во заключ. договоров

$X_{n,j}$ - индикатор страхового случая

$\Rightarrow S_{p_n}$ - количество выплат /

Пусть $\{X_{p,j}\}$ - семейство посл-ней случ. вел.,

$X_{p_1}, \dots$ независ, $X_{p,j} \sim \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$

N_p - положит. целочисл. сл вел,

$N_p, X_{p_1}, X_{p_2}, \dots$ независ. $\forall p$

$p N_p \to N$ - сл вел

$S_p \xrightarrow[p\to 0]{} S$

Тогда $P(S=k) = \frac{1}{k!}\int_0^\infty e^{-z} z^k \, dP(N<z)$ -

обобщ. пуасс. случ величина (смешанн. пуассон)

<u>Док-во:</u> основано на т. Переноса

Возьмём посл-ть p_n: $0<p_n<1$, $p_n \to 0$,

рассм. $m_n = \left[\frac{1}{p_n}\right]$

Тогда $S_{m_n} = \sum_{j=1}^{m_n} X_{p_n j} \Rightarrow z \sim \Pi(1)$ (по теор. Пуассона, т.к. $m_n p_n \to 1 = \lambda$)

$p_n N_{p_n} \xrightarrow[p\to 0]{} N$

$\Rightarrow$ выполнены условия теор переноса,

хар ф $z \sim h(t) = e^{e^{it}-1}$ $\Rightarrow$ по теор. переноса

$S_{n, N_p} \to S$

$f(t)$ - хар ф S, $f(t) = \int_0^\infty e^{(e^{it}-1)z} \, dP(N<z)$,

она соотв. обобщ. пуасс. сл. вел.,

ч.т.д.

$H(x) = \int F(x,y)\, dQ(y)$ – смесь распределения $F(x,y)$ по y относительно $Q(y)$

При этом $F(x,y)$ – смешиваемое распределение, $Q(y)$ – смешивающее распр.

Задача Показать, что если $N \sim$ гамма распр., то $S \sim$ отриц. биномиальн. распр.

Если в теор. переноса
$$S_n \Rightarrow N(0,1)$$
$$F(x) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{u}}\right) dA(u)$$
$\Phi(x)$ – ф.р. $N(0,1)$
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{u}}\right) dA(u) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sqrt{u}y} d\int_0^\infty \Phi(y)\, dA(u) = \int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sqrt{u}y} d\Phi(y)\, dA(u) =$$
$$= \int_0^\infty \varphi(t\sqrt{u})\, dA(u) \ominus$$ где $\varphi(t)$ – хар. ф. $\sim \Phi(x)$,
$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$
$$\ominus \int_0^\infty e^{-\frac{t^2 u}{2}} dA(u) = \int_0 \varphi^u(t)\, dA(u)$$

Класс масштабных смесей норм. распр.

N ($|x|^{-1} e^{-x^2}$ – убывание хвоста)

распр. Лапласа $p(x) = \frac{1}{2}\mu e^{-\mu|x|}$

распр. Стьюдента $(|x|^{-\delta})_{\delta > 0}$ при $\delta = 1$ – распр. Коши

$F(x,y)$ $x \in R$, $y \in Y \subset R^m$

на Y опр. σ-алгебру Σ

(Y, Σ) – измер. пространство

при $\forall$ фикс. y $F(x,y)$ – ф. распр.

при $\forall$ фикс. x $F(x,y)$ измерима отн. Σ

Пусть $Q(y)$ – вер мера на $(\mathcal{Y}, \Sigma)$, т.е.
$(\mathcal{Y}, \Sigma, Q)$ – вер. пр-во
Тогда $H(x) = \int F(x,y)\,dQ(y)$ – смесь распр $F(x,y)$ по y отн. $Q(y)$

Если определить на $(\mathcal{Y}, \Sigma, Q)$ тождеств. сл. вел. $\mathcal{Y}(y) = y$, то $H(x) = \mathbb{E} F(x, \mathcal{Y}) = \int F(x,y)\,dQ(y)$
Если $\exists$ плотность $f(x,y)$ $F(x,y)$, то плотность $H(x)$ – $h(x) = \int f(x,y)\,dQ(y) = \mathbb{E} f(x, \mathcal{Y})$

Пример. Пусть Q дискретна прин. знач. $(y_1, y_2, \dots$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots)$
Тогда $H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k F(x, y_k)$
$F(x, y_k)$ – компоненты смеси,
p_k – веса компонент
$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k f(x, y_k)$ – плотность

$F\left(\frac{x-v}{u}\right)$, $y = (u, v)$, $v \in \mathbb{R}$, $u > 0$ - параметр масштаба
$H(x) = \mathbb{E} F\left(\frac{x-V}{U}\right)$ – сдвиг-масштабная смесь
$H(x) \sim XU + V$, X и (U, V) стохастически независимы
$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k F\left(\frac{x-a_k}{b_k}\right)$
$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{1}{b_k} f\left(\frac{x-a_k}{b_k}\right)$

Пример
$F_k(x) = F(x, y_k)$ – усл. вер того, что величина признака $< x$ при условии, что индивид выбран из k-й группы
$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k F_k(x)$

Смесь позволяет искусственно сделать неоднородную группу однородной

Опр. $F(x, y)$ при $\forall y$ – ф.р.
при $\forall x$ измерима по y

$\mathcal{Q}$ – семейство сл. вел.

$\mathcal{H} = \{ H_Q(x), \ Q \in \mathcal{Q} \}$ – семейство смесей

$H_Q(x) = \mathbb{E} F(x, Q)$

Семейство $\mathcal{H}$ наз-ся идентифицируемым, если из того, что $\mathbb{E}F(x, Q_1) = \mathbb{E}F(x, Q_2)$ $\forall x$, где $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$, следует, что $Q_1 \overset{d}{=} Q_2$

Пример Пусть F – равн. распр., тогда смесь

$$\frac{1}{3} \cdot 3 I_{[0; \frac{1}{3}]} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} I_{[\frac{1}{3}; 1]} \text{ что } =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 I_{[0; \frac{1}{2}]}(x) + \frac{1}{2} \cdot 2 I_{[\frac{1}{2}; 1]}(x)$$

Неидентифицируемая смесь

Опр Сдвиг-масштабная смесь $\mathbb{E}F\left(\frac{x-U}{V}\right)$, $(U, V) \in \mathcal{Q}$ наз-ся идентифицируемой, если из того, что $\mathbb{E}F\left(\frac{x-U_1}{V_1}\right) = \mathbb{E}F\left(\frac{x-U_2}{V_2}\right)$ $\forall x$ следует, что $(U_1, V_1) \overset{d}{=} (U_2, V_2)$ или из того, что $X_1 U_1 + V_1 \overset{d}{=} X_2 U_2 + V_2$ следует, что $(U_1, V_1) \overset{d}{=} (U_2, V_2)$

В конечномерн. случае смесь идентифиц. если из того, что $\sum_{j=1}^{k} p_j F\left(\frac{x-a_j}{b_j}\right) = \sum_{i=1}^{m} q_i F\left(\frac{x-a_i}{b_i}\right)$, следует, что

1) $k = m$
2) $\forall j \ \exists i: \ p_i = q_j, \ a_j = a_i, \ b_j = b_i$

14.11 Смеси вер. распределений

Опр. $F(x,y)$ $x \in R$, $y \in Y \subset R^m$, $m \geq 1$, на Y задана Σ - б-алгебра. $F(x,y)$ измер. по y при $\forall$ фикс X
$F(x,y)$ - ф. распр при $\forall$ фикс y
мера Q на $(Y,\Sigma) \to (Y,\Sigma,Q)$
Смесь F отн. Q
$H(x) = \int F(x,y)\, Q(dy) = \mathbb{E}F(x,y)$

Опр. $\mathcal{Q}$ - семейство сл. вел.
$\mathcal{H} = \{ H_Q = \mathbb{E}F(x,Q),\ Q \in \mathcal{Q} \}$
$\mathcal{H}$ - идентифицир.
$\mathbb{E}F(x,Q_1) = \mathbb{E}F(x,Q_2)$ $\forall x$ при $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q} \Rightarrow Q_1 \overset{d}{=} Q_2$

(u,v) - двумерная сл. вел., $u>0$ п.н.
$EF\left(\frac{x-v}{u}\right)$ сдвиг-масштабная смесь
$\mathcal{H} = \{ \sum_{i=1}^{n} p_i F\left(\frac{x-a_i}{b_i}\right);\ n \geq 1,\ p_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ a_i \in R,\ b_i > 0 \}$ - конечном. сдвиг-масш. смесь

Опр. Семейство $F(x,y)$, $y>0$ наз-ся аддитивно замкнутым, если $\forall y_1>0,\ y_2>0$
$F(x,y_1) * F(x,y_2) = F(x, y_1+y_2)$
$\left(F(x,y_1) * F(x,y_2) = \int F(x-u, y_1)\, dF(u,y_2) = \int F(x-u,y_2)\, dF(u,y_1) \right)$

Пример $\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{b}}\right)$, $b>0$

Теор 1 $\exists\, F(x,y)$, $y>0$ - аддитивно замкн.
$\mathcal{Q}$: $P(Q>0)=1 \Rightarrow H = \{ \mathbb{E}F(x,Q),\ Q \in \mathcal{Q} \}$ - идентифици.
$\to$ масштабная смесь нормальных законов идентифиц

Теор 2 Пусть $F(x,y) = F(x \cdot y)$ $y>0$,
$G(y) = F(e^y)$, $F(0)=0$, $\widehat{G}(w)$ не обр. в ноль,
где $\widehat{G}(w)$ - преобр. Фурье от G
Тогда $\mathcal{H} = \{ \mathbb{E} F(x, Q) : Q \in \mathcal{Q} : P(Q>0) = 1 \}$ — идентифиц.

Теор.3 Пусть $\mathcal{Q}$ - $\forall$ сл. вел. и хар. ф-ция соотв. $F(x,y)$ нигде не обращ. в ноль.
Тогда сем-во $\mathcal{H} = \{ \mathbb{E} F(x-Q), Q \in \mathcal{Q} \}$ - идентифицируемо

$\Rightarrow$ сдвиговые смеси безгр. делимых распределений идентифицируемы

Идентифицир. конечной смеси:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i F\left(\frac{x-a_i}{b_i}\right) = \sum_{j=1}^{k} q_j F\left(\frac{x-b_j}{s_j}\right) \Longrightarrow$$

1) $k=m$

2) $\forall i = \overline{1,m}$ $\exists j$: $p_i = q_j$, $a_i = b_j$, $b_i = s_j$

Теор.4 Конечн. сдвиг-масштабная смесь норм. законов идентифицируема

Пример X_1, X_2, U_1, U_2 независ. $X_1, X_2 \sim N(0,1)$ U_1 $P(U_1 = 1) = 1$
U_2 : $P(U_2 > 0) = 1$

$Z = X_1 U_2 + X_2$

1) $P(Z < x) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Phi\left(\frac{x-v}{u}\right) dP(X_2 < v) dP(U_2 < u)$

2) $\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Phi\left(\frac{x-v}{u}\right) dP(X_1 U_2 < v) dP(U_1 < u)$

в общем случае нельзя идентиф. смеси

Пуассон. процесс

1) $X(0)=0$ п.н.

2) процесс имеет независ. приращения: $t_0<t_1<\ldots<t_n$

$X(t_0),\ X(t_1)-X(t_0),\ \ldots,\ X(t_n)-X(t_{n-1})$ независ. в совокупн.

3) процесс однородный

$$X(s+h)-X(s) \overset{d}{=} X(t+h)-X(t) \quad \forall s,t$$

4) $h\downarrow 0$
$$P(X(h)=0) = 1-\lambda h+o(h)$$
$$P(X(h)=1) = \lambda h+o(h)$$
$$P(X(h)\geq 2) = o(h)$$

$$P(X(t)=k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

$\Rightarrow EX(t) = DX(t) = \lambda t$, λ – интенсивность

Обозн. $N_1(t)$ – стандартный Пуасс. процесс $(\lambda=1)$

$P(N_\lambda(t)=k) = P(N_1(\lambda t)=k)$, т.е. $N_\lambda(t)$ и $N_1(\lambda t)$ стохастич. эквивалентны

Кол-во скачков на отрезке времени имеет распр. вариац. ряда выборки из равномерн. распр.
(равн. распр имеет наибольш. дифференц. энтропию среди всех распр. на отрезке)

время до скачка имеет показат. распр
(показат. распр имеет наибольш. дифф энтропию среди всех распр. на $[0,+\infty)$)

$\Lambda(t)$ – интенсивность

$N^*(t)$ – неоднор. Пуассон. процесс

$N^*(0)=0$ п.н.

$$P(N^*(t)=k) = \frac{e^{-\Lambda(t)}(\Lambda(t))^k}{k!}$$

$P(N_1(\Lambda(t))=k) = \mathbb{P}(N^*(t)=k)$,

$N_1(\Lambda(t))$ и $N^*(t)$ стохаст. эквивалентны

$\frac{\Lambda(t+h)-\Lambda(t)}{h} = \lambda(t)$ – мгновенная интенсивность

$\Lambda(t) = \int_0^{\tau} \lambda(\tau)d\tau$

Предположим, что $\Lambda(t)$ – сл. процесс, т.ч.

1) $\Lambda(0)=0$ п.н.

2) $\mathbb{P}(\Lambda(t)<\infty)=1 \quad \forall t$

3) Траектория $\Lambda(t)$ не убыв. и непр. справа

$N(t) = N_1(\Lambda(t))$ – стохаст. процесс
дважды стох. Пуасс. процесс (процесс Кокса)

$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau)d\tau$, $\lambda(\tau)$ – интегрир. и положит. траектории

$\lambda(t)$ – мгновенн. стохастич. интенсивность

$\Lambda(t)$ – накопленная интенсивность

$\left(\frac{\Lambda(t+h)-\Lambda(t)}{h} = \lambda(t) \text{ – мгн. инт.} \right)$

$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau)d\tau$ $\quad$ $\Lambda(t)$ – управляющий процесс

$\mathbb{E}N(t) = \mathbb{E}N_1(\Lambda(t)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(N_1(\Lambda(t))|\Lambda(t))) = \mathbb{E}\Lambda(t)$

$\mathbb{D}N(t) = \mathbb{E}N^2(t) - (\mathbb{E}N(t))^2$

$\mathbb{E}N^2(t) = \mathbb{E}(N_1(\Lambda(t)))^2 = \mathbb{E}(\mathbb{E}\{N_1^2(\Lambda(t))|\Lambda(t)\}) =$

$= \mathbb{E}\Lambda(t) + \mathbb{E}\Lambda^2(t)$

$\mathbb{D}N(t) = \mathbb{E}\Lambda(t) + \mathbb{D}\Lambda(t)$

<u>Пример</u> теория измерений

Погрешность

При разных измерениях число факторов разное

$\Rightarrow$ приходим к случайной сумме (пуасс, геометр.)

$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, X_i – н.о.р.с.в. $\left(\sum_{1}^{0} = 0\right)$

$N(t), X_1, X_2, \ldots$ независ $\forall t$

$S(t)$ – обобщ. процесс Кокса

если $\Lambda(t) = \lambda t \Rightarrow S(t)$ – обобщ. пуассон. процесс

Пример Броуновское движение частицы в неодн. среде

X_i – отклонение частицы при i-м соударении

$N(t)$ число соударений частицы за время t

$S(t)$ – коорд. частицы в момент t

$\mathbb{E}X_i = a < \infty$

$\mathbb{D}X_i = \sigma^2 < \infty$

$S(t)$ может иметь свои другие тяжелые хвосты

$\mathbb{E}S(t) = a\,\mathbb{E}\Lambda(t)$

$\mathbb{D}S(t) = \mathbb{E}\Lambda(t)(a^2+\sigma^2) + a^2\mathbb{D}\Lambda(t)$

(доказать)

21.11 Обобщённые процессы Кокса

$X_1, X_2 \ldots$ – н.о.р.с.в. , $\mathbb{E}X_1 = a$ $\mathbb{D}X_1 = \sigma^2$

$N_1(t)$ – стандартн. пуассон. процесс

$\Lambda(t)$ – процесс с неубыв. непр. справа траекториями

$\Lambda(0) = 0$ п. в. $\mathbb{P}(\Lambda(t) < \infty) = 1$ $\forall t$

$N(t) = N_1(\Lambda(t))$ – дважды стохастический пуассон. процесс (процесс Кокса)

$\Lambda(t)$ – управляющий процесс

$S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$ – обобщ. процесс Кокса

Будем предполагать, что $\mathbb{E}X_i=0$, $\mathbb{D}X_i=\sigma^2$

Теор. 1 Пусть $\Lambda(t)\xrightarrow[t\to\infty]{P}\infty$. Пусть $d(t)$ – неогр. возраст. положит. ф-ция

Тогда для того, чтобы $\frac{S(t)}{\sigma\sqrt{d(t)}}$ сходились слабо к Z ($\forall t$ $\frac{S(t)}{\sigma\sqrt{d(t)}}$ – одномерное нормир. распр-е нормированного процесса Кокса)

необх. и дост., чтобы $\exists U\geq 0$ сл. вел.:

1) $P(Z<x)=\int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)dP(U<y)$ (масштабная смесь норм. законов)

2) $\frac{\Lambda(t)}{d(t)}\Rightarrow U$ (это озн., что при некоторой нормировке у $\Lambda(t)$ есть предел, м.б. случайный)

Пусть $G_{\alpha,\theta}(x)$ – ф-ция распр. строго устойч. закона

$g_{\alpha\theta}(t)=\exp(-|t|^{\alpha}\cdot\exp(-i\frac{\pi\theta\alpha}{2}\operatorname{sgn}t)$

α - показатель распр-я

θ - параметр

$0<\alpha\leq 2$, $|\theta|\leq\min(1,\frac{2}{\alpha},-1)$

Теор. 2 $\Lambda(t)\to\infty$, $d(t)$ – возр. неогр. полож. ф-ция

Тогда $\frac{S(t)}{\sigma\sqrt{d(t)}}\Rightarrow Z\sim G_{\alpha,0}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{\Lambda(t)}{d(t)}\Rightarrow U\sim G_{\frac{\alpha}{2},1}$.

(*) $G_{\alpha,0}(x)=\int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{u}}\right)dG_{\frac{\alpha}{2},1}(u)$ (Золотарёв, 1983 Одномерн. устойч. распр-я)

Теор. 2 следует из соотн. (*), теор. 1 и идентифицируемости масштабных смесей норм. законов:

$P(Z<x)=\int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{u}}\right)dP(U<u)$ $\Rightarrow$ $U\sim G_{\frac{\alpha}{2},1}$ если $Z\sim G_{\alpha,0}$ (в силу *)

$t=1,2,\ldots$ g

$t=1,2,\ldots$ дискр. время

$\Lambda(n)=\sum_{i=1}^{n} z_i$, где z_i - н.о.р.с.в., $z_i \geq 0$

$\Lambda(n)$ - однородный с независ. приращениями

z_i - приращ. процесса $\Lambda(n)$

Пусть $S_n=\sum_{i=1}^{N_1(\Lambda(n))} X_i$, $\mathbb{E}X_i=0$, $\mathbb{D}X_i=\sigma^2$

<u>Теор 3</u> $\frac{S_n}{\delta_n} \Rightarrow G_{\alpha,0}$ при некотором выборе нормировочных констант δ_n

$\Leftrightarrow \forall k>0 \quad \lim_{x\to\infty} \frac{P(z_1>x)}{P(z_1>kx)}=k^{\frac{\alpha}{2}}$

$\Rightarrow$ тяжелые хвосты обобщ. процессов Кокса обуславливаются "плохим" поведением управл. процесса.

При этом распр. слагаемых x_i могут иметь сколь угодно лёгкие хвосты

З.Б.Ч. для обобщ. процессов Кокса с ненулевым средним

<u>Теор 4</u> Пусть $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$, $\mathbb{E}X_i=a$. Тогда

$\frac{S(t)}{t} \Rightarrow Z \Leftrightarrow \exists U\geq 0$ сл. вел. т.ч. $\frac{\Lambda(t)}{t} \Rightarrow U$,

$Z \stackrel{d}{=} aU$

Предел не случаен $\Leftrightarrow U$ не случайна

Свойства масштабных смесей нормальных законов

$\int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{x}{y}\right) dP(Y<y) \qquad Y>0$

$\mathbb{E}\Phi\left(\frac{X}{Y}\right)$ плотность $\mathbb{E}\left[\frac{1}{Y}\varphi\left(\frac{X}{Y}\right)\right]=\int_0^{\infty}\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)dP(Y<y)$

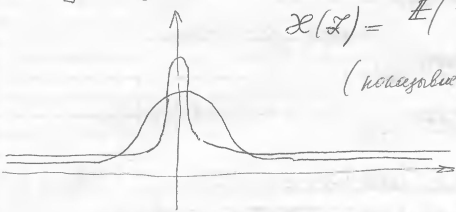
Y - дискретна $\sum_k P(Y=y_k)\,\Phi\left(\frac{x}{y_k}\right)$ плотность

$\sum_k \frac{P(Y=y_k)}{y_k}\,\varphi\left(\frac{x}{y_k}\right)$

] $\mathbb{E}Z^n < \infty$

$$\varkappa(Z) = \mathbb{E}\left(\frac{Z-\mathbb{E}Z}{\sqrt{\mathbb{D}Z}}\right)^4$$ – коэффициент эксцесса

(показывает островершинность распр-я)



Если $Z \sim \Phi(x) \Rightarrow \varkappa(Z) = 3$

Пусть $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ – хар. ф. норм. стандартн. распр-я

$\Rightarrow$ Надо взять 4-ю произв-ю и посчитать её в $0 \Rightarrow \varkappa$

$\mathbb{E}\,\Phi\left(\frac{X}{Y}\right)$ $\quad X \sim N(0,1)$, $Y > 0$

$\parallel$

$\mathbb{P}(XY < x)$

Лемма Пусть $\mathbb{E}X = 0$, $\mathbb{P}(Y>0) = 1$, $\mathbb{E}X^4 < \infty$, $\mathbb{E}Y^4 < \infty$ ($\underbrace{X, Y \text{ независ.}}$)

Тогда $\varkappa(XY) \geq \varkappa(X)$, $\varkappa(XY) = \varkappa(X) \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y = const) = 1$

Док-во: $$\varkappa(XY) = \mathbb{E}\left(\frac{XY - \mathbb{E}XY}{\sqrt{\mathbb{D}XY}}\right)^4 = \frac{\mathbb{E}(XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y)^4}{(\mathbb{E}(XY-\mathbb{E}XY)^2)^2} =$$

$$= \frac{\mathbb{E}X^4\mathbb{E}Y^4}{(\mathbb{E}X^2\mathbb{E}Y^2)^2} = \varkappa(X)\frac{\mathbb{E}Y^4}{(\mathbb{E}Y^2)^2}$$

В силу нер-ва Йенсена $\mathbb{E}Y^4 \geq (\mathbb{E}Y^2)^2$

$\mathbb{E}Y^4 = (\mathbb{E}Y^2)^2 \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y = const) = 1$

$\Updownarrow$

$\mathbb{D}Y^2 = 0 \Leftrightarrow Y \overset{п.в.}{=} const$

т.м. 9

Значит, если $Y = \sqrt{U}$, $X \sim N(0,1)$, $\mathbb{E}U^2 < \infty$, то

$\varkappa(X\sqrt{U}) \geq 3 \Rightarrow$ предельн. распр-е обобщ. процессов Кокса имеют более тяжёлые хвосты в смысле $\varkappa$

Z – сл. вел, $\mathbb{E}Z=0$

$\mathbb{P}(|Z|>x)$ = вер-ть больших уклонений

$F_Z(x)=\int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)dP(U<y)$

$p_Z(x)=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}}\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)dP(U<y)$

Утв. Пусть $X\sim N(0,1)$, $\mathbb{P}(U>0)=1$, $Z=X\sqrt{U}$

Тогда $\forall x\geq 0$ $\mathbb{P}(Z>x)\geq 1-\Phi(\sqrt{2\pi}\,x\,p_Z(0))$

распр. Z симметр. $\Rightarrow$ $P(|Z|>x)\geq 2(1-\Phi(\sqrt{2\pi}\,x\,p_Z(0)))$

$p_Z(x)=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2y}}dP(U<y)\Rightarrow p_Z(0)=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dP(U<y)=$
$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathbb{E}U^{-\frac{1}{2}}$

Если $\mathbb{E}U^{-\frac{1}{2}}=1$, то

$\mathbb{P}(|Z|>x)\geq 2(1-\Phi(x))\Rightarrow$

Масштабные смеси норм. законов имеют более тяжелые хвосты, чем сами норм. законы

28.11 Устойчивость смесей

$H(x)=\int F(x,y)Q(dy)$

$\mathbb{E}\Phi\left(\frac{X}{\sqrt{U}}\right)=\int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)dP(U<y)$ – масштабная смесь

$\downarrow$

$F_{X\sqrt{U}}(x)$, $X\sim N(0,1)$

XY, $Y>0$

$\frac{X}{Y}$

Прямая задача

$\rho(X_1,X_2)=\sup_x |F_{X_1}(x)-F_{X_2}(x)|$ расстояние

Цель: оценить $\rho\left(\frac{X_1}{Y_1},\frac{X_2}{Y_2}\right)$, X_1,X_2,Y_1,Y_2 независимы

$P(Y_i\geq 0)=1$

Обозн. $\Delta(x) = \left| P\left(\frac{X_1}{Y_1} < x\right) - P\left(\frac{X_2}{Y_2} < x\right)\right|$

$$\underset{Y \geq 0}{P\left(\frac{X}{Y} < x\right)} = P(X<0)P(Y=0) + P(X < xY,\ Y>0) =$$

$$= F_X(0)\left(F_Y(0+) - F_Y(0)\right) + \int_{0+}^{\infty} F_X(xy)\,dF_Y(y)$$

Пусть $X_i \sim F_i(x)$

$Y_i \sim G_i(x)$

$$\Rightarrow \Delta(x) \leq \underbrace{F_1(0)(G_1(0+) - G_1(0)) + F_2(0)(G_2(0+) - G_2(0))}_{Q_1} +$$

$$+ \underbrace{\left|\int_{0+}^{\infty} F_1(xy)\,dG_1(y) - \int_{0+}^{\infty} F_2(xy)\,dG_2(y)\right|}_{Q_2}$$

$$Q_1 = P(X_1<0)\,P(Y_1=0) + P(X_2<0)\,P(Y_2=0)$$

$$Q_2 = \left|\int_{0+}^{\infty} F_1(xy)\,dG_1(y) - \int_{0+}^{\infty} F_1(xy)\,dG_1(y) + \int_{0+} F_2(xy)\,dG_1(y) - \right.$$

$$\left. - \int_{0+}^{\infty} F_2(xy)\,dG_2(y)\right| \leq \underbrace{\left|\int_{0+}^{\infty}(F_1(xy) - F_2(xy))\,dG_1(y)\right|}_{Q_{21}} +$$

$$+ \underbrace{\left|\int_{0+}^{\infty} F_2(xy)\,d(G_1(y) - G_2(y))\right|}_{Q_{22}}$$

$$Q_{21} \leq \int_{0+}^{\infty} |F_1(xy) - F_2(xy)|\,dG_1(y) \leq \rho(X_1, X_2)\,P(Y_1>0)$$

$$|F_1(xy) - F_2(xy)| \leq \rho(X_1, X_2)$$

$$Q_{22} = \left|\int_{0+}^{\infty} F_2(xy)\,d(G_1(y) - G_2(y))\right|$$

Пусть $x = 0$, тогда

$$Q_{22} = F_2(0)\left|\int_{0+}^{\infty} d(G_1(y) - G_2(y))\right| = F_2(0)\,|P(Y_1>0) - P(Y_2>0)| =$$

$$= \overset{P(X_2<0)}{\overbrace{F_2(0)}}\,|P(Y_1=0) - P(Y_2=0)|$$

Пусть $x \neq 0$

$$Q_{22} = \underbrace{F_2(xy)(G_1(y) - G_2(y))\Big|_{0+}^{\infty}}_{Q_{221}} - \underbrace{\int_{0+}^{\infty}(G_1(y) - G_2(y))\,dF_2(xy)}_{Q_{222}} \leq$$

$\leq$

$Q_{221} \le F_2(0+)\,|G_1(0+) - G_2(0+)| = \mathbb{P}(X_2 \le 0)\,|\mathbb{P}(Y_1=0) - \mathbb{P}(Y_2=0)|$

$$Q_{222} \le \rho(Y_1, Y_2) \underbrace{\int_{0+}^{\infty} dF_2(xy)}_{I_2(x)}$$

(*) $I_2(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X_2 > 0), & x > 0 \\ \mathbb{P}(X_2 < 0), & x < 0 \end{cases}$

<u>Лемма</u> Пусть X_i, Y_i, $i=1,2$ незав. и $Y_i \ge 0$

Тогда $\rho\left(\frac{X_1}{Y_1}, \frac{X_2}{Y_2}\right) \le \mathbb{P}(X_1<0)\mathbb{P}(Y_1=0) + \mathbb{P}(X_2<0)\mathbb{P}(Y_2=0) +$

$+ \rho(X_1, X_2)\mathbb{P}(Y_1>0) + \mathbb{P}(X_2 \le 0)\,|\mathbb{P}(Y_1=0) - \mathbb{P}(Y_2=0)| +$

$+ \rho(Y_1, Y_2)\, I_2(x)$, где I_2 определяется (*)

<u>Следствие 1</u> Пусть $\mathbb{P}(Y_1=0) = \mathbb{P}(Y_2=0) = 0$

$\rho\left(\frac{X_1}{Y_1}, \frac{X_2}{Y_2}\right) \le \rho(X_1, X_2) + \rho(Y_1, Y_2) \min\limits_{i=1,2} \max(\mathbb{P}(X_i>0), \mathbb{P}(X_i<0))$

<u>Следствие 2</u> $\rho\left(\frac{X_1}{Y_1}, \frac{X_2}{Y_2}\right) \le \rho(X_1, X_2) + \rho(Y_1, Y_2)$

<u>Следствие 3</u> Пусть дополнительно хотя бы для одного i

$\mathbb{P}(X_i > 0) = \mathbb{P}(X_i < 0)$

Тогда $\rho\left(\frac{X_1}{Y_1}, \frac{X_2}{Y_2}\right) \le \rho(X_1, X_2) + \frac{1}{2}\rho(Y_1, Y_2)$

$\rho\left(\frac{1}{Y_1}, \frac{1}{Y_2}\right) = \sup\limits_x \left|\mathbb{P}\left(\frac{1}{Y_1} < x\right) - \mathbb{P}\left(\frac{1}{Y_2} < x\right)\right| =$

$= \sup\limits_x \left|\mathbb{P}\left(Y_1 > \frac{1}{x}\right) - \mathbb{P}\left(Y_2 > \frac{1}{x}\right)\right| = \sup\limits_x \left|1 - \mathbb{P}\left(Y_1 \le \frac{1}{x}\right) + (-1) + \mathbb{P}\left(Y_2 \le \frac{1}{x}\right)\right| =$

$= \sup\limits_x |\mathbb{P}(Y_1 \le z) - \mathbb{P}(Y_2 \le z)| = \rho(Y_1, Y_2)$

<u>Следствие 4</u> Пусть $\mathbb{P}(Y_1=0) = \mathbb{P}(Y_2=0) \ne 0$

$\Rightarrow \rho(X_1 Y_1, X_2 Y_2) \le \rho(X_1, X_2) + \rho(Y_1, Y_2) \min\limits_{i=1,2} \max(\mathbb{P}(X_i>0), \mathbb{P}(X_i<0))$

Следствие 5

$$\rho(x_1y_1, x_2y_2) \le \rho(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2)$$

Следствие 6 (усл. как в 3)

$$\rho(x_1y_1, x_2y_2) \le \rho(x_1, x_2) + \frac{1}{2}\rho(y_1, y_2)$$

$$Z_i = x_i y_i$$

$x_i \sim N(0,1)$, $y_i > 0$ — смешивающ. распр.

$$F_Z(x) = \mathbb{E}\Phi\left(\frac{x}{y_i}\right)$$

$$\Rightarrow \rho(Z_1, Z_2) \le \frac{1}{2}\rho(y_1, y_2)$$

Обратная задача

$f_j(t)$ — хар. функция $Z_j = X\sqrt{Y_j}$

$$f_j(t) = \mathbb{E}e^{itZ_j} = \mathbb{E}e^{itX\sqrt{Y_j}} = \mathbb{E}(\mathbb{E}e^{itX\sqrt{Y_j}}|_{Y_j}) =$$

$$= \mathbb{E}e^{-\frac{t^2 Y_j}{2}}$$

$$\begin{cases} \psi_{Y_j}(s) = \mathbb{E}e^{-sY_j} \\ f_j(t) = \psi_j\left(\frac{t^2}{2}\right) \end{cases}$$

Преобр. Лапласа-~~Стирпанта~~ Стилтьеса

По $\psi_j(s)$ можно однозначно определить $\mathbb{P}(Y_j < x)$

$$|f_1(t) - f_2(t)| = \left|\psi_1\left(\frac{t^2}{2}\right) - \psi_2\left(\frac{t^2}{2}\right)\right|$$

$$\mathbb{P}(Y_j < x) = \lim_{t\to\infty} \sum_{n<\sqrt{2t}x} \frac{(-1)^n (2t)^{\frac{n}{2}}}{n!} f_j^{(n)}(\sqrt{2t}) \quad \text{(Феллер)}$$

формула обращения

Вывод.

$$|P(Y_1 < x) - P(Y_2 < x)| \le \lim_{t\to\infty} \sum_{n<\sqrt{2t}x} \frac{(2t)^{\frac{n}{2}}}{n!} |f_1^{(n)}(\sqrt{2t}) - f_2^{(n)}(\sqrt{2t})|$$

Пример U_1 — вырожд. в 1

U_2 — вырожд. в $1+\varepsilon$

$\rho(U_1, U_2) = 1$

$$\left| \mathbb{E}\Phi\left(\frac{x}{U_1}\right) - \mathbb{E}\Phi\left(\frac{x}{U_2}\right) \right| = \left| \Phi(x) - \Phi\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right) \right| \le$$

$$\le \left| \frac{x(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon} - \frac{x}{1+\varepsilon} \right| \varphi\left(\delta x + (1-\delta)\frac{x}{1+\varepsilon}\right) = \qquad \delta \in (0;1)$$

$$= \left| \frac{x\varepsilon}{1+\varepsilon} \right| \varphi\left(\frac{\delta\varepsilon + 1}{1+\varepsilon} x \right) \le \varepsilon x' \varphi(x') \le \varepsilon \sup_{x'} |x' \varphi(x')| \le$$

$$\frac{1+\delta\varepsilon}{1+\varepsilon} > \frac{1}{1+\varepsilon}$$

$$\frac{x}{1+\varepsilon} \to x'$$

$$\sup_{x'} |x'\varphi(x')| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$$ (подставим $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ и найдём производную)

$$\le \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi e}} = \varepsilon'$$

$\Rightarrow$ равномерная метрика не подходит

Метрика Леви

(метризует слабую сходимость)

$L(X,Y) = L(F,G) = \inf\{h \ge 0 : F(x-h) - h \le G(x) \le F(x+h) + h, \forall x \in \mathbb{R}\}$

геометр. интерпретация: макс. длина стороны квадрата (со стор. $\parallel$ осям), который можно вписать между графиками F и G

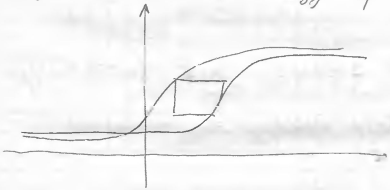
Устойчивость смесей норм. законов

05.12

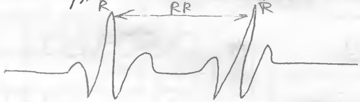
$$\rho(F,G) = \sup_x |F(x) - G(x)|$$

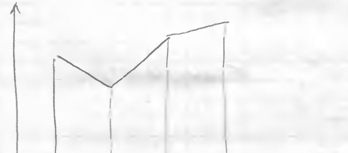
Опр. Метрика Леви $L(F,G) = L(G,F) =$
$= \inf\{h : G(x-h)-h \le F(x) \le G(x+h)+h, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Макс. длина стороны квадрата ($\parallel$ осям), который можно вписать между графиками F и G



$$F_{p,}(x) = p\Phi(x) + (1-p)\Phi(Gx)$$





$Z = X W_{G,p}$ $\qquad X \sim N(0,1)$

$$W_{G,p} \sim \begin{cases} 1, & p \\ G^{-1}, & 1-p \end{cases}$$

$$F_{p,G} = \mathbb{E}\Phi\left(\frac{X}{W_{G,p}}\right)$$

масштабная смесь норм. закона

$L(\Phi, F_{p,3}) < \varepsilon$

Насколько близки 1 3 и р?

$\rho(\Phi, \mathbb{E}\Phi(\frac{X}{U}))$

Теор. $\exists\, \mathbb{E}(\max(U, U^{-1})) < \infty \Rightarrow \rho(\Phi, \mathbb{E}\Phi(XU^{-1})) \leq 0.242 \times$
$\times (\mathbb{E}(\max(U, U^{-1}))^{\frac{?}{?}} - 1))$

$U > 0$

Док-во:

$\rho(\Phi, \mathbb{E}\Phi(XU^{-1})) = \sup_x |\Phi - \mathbb{E}\Phi(XU^{-1})| = \sup_x |\mathbb{E}(\Phi(X) - \Phi(XU^{-1}))| \leq$

$\leq \sup_x |\mathbb{E}|x(1-U^{-1})|\varphi(x(\delta + (1-\delta)U^{-1}))|, \quad =$
$\delta \in (0,1)$

$= \sup_x \mathbb{E}|x'|1-U^{-1}|U(U\delta + (1-\delta))\varphi(x')| \leq$

$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \mathbb{E}|(1-U^{-1})U(U\delta + (1-\delta))| \qquad (*)$

$\sup_x x'\varphi(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$

Если $U > 1$ $\quad (*) \leq |1-U|$
если $U < 1$ $\quad (*) \leq |1-U^{-1}|$ $\quad \leq \max(U, U^{-1}) - 1$

Теор. 2 $\quad \exists\, \mathbb{E}U^{-2} < \infty \Rightarrow \rho(\Phi, \mathbb{E}\Phi(XU^{-1})) \leq \mathbb{E}|U^{-2} - 1|$

Пусть $\mathbb{E}U^4 < \infty$

$\varkappa(Z) = \mathbb{E}\left(\frac{Z - \mathbb{E}Z}{\sqrt{\mathbb{D}Z}}\right)^4$

$\varkappa(X) = 3$

$X \sim N(0,1)$

$\gamma(Z) = |\varkappa(Z) - 3|$

Теор 3 $\exists\ \mathbb{E}u^2 = 1, \quad \mathbb{E}u^4 < \infty$

$$\rho(\Phi, \mathbb{E}\Phi(x, u^{-1})) \le 0{,}648\,\gamma(z), \quad z \sim \mathbb{E}\Phi(xu^{-1})$$

Теор. 4 $\exists\ \mathbb{E}u^\delta < \infty, \ \delta > 0$, тогда

$$L(\Phi, \mathbb{E}\Phi(xu^{-1})) \le \left(2 + \frac{2}{\delta\sqrt{2\pi e}}\right) L(u^\delta, 1)$$

$$F_{p,\mathfrak{z}}(x) = p\Phi(x) + (1-p)\Phi(\mathfrak{z}, x)$$

Теор. 5 Пусть $p \in (0,1), \ \mathfrak{z} \in (0,1)$:

$$L(\Phi, F_{p\mathfrak{z}}) \le \varepsilon \Rightarrow \exists c: \ L(u_{p,\mathfrak{z}}, 1) \le c\sqrt{\varepsilon}$$

$$c = \left(\sqrt{e}(1 + \sqrt{2\pi})\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$u_{p,\mathfrak{z}} = u_{p,\mathfrak{z}}^{-1} \quad \begin{cases} 1 & p \\ \mathfrak{z} & 1-p \end{cases}$$

Док-во.

~~$\rho(\Phi, \mathbb{E}\Phi(xu^{-1})$~~

$$\rho(\Phi, F_{p,\mathfrak{z}}) \le \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) L(\Phi, F_{p,\mathfrak{z}}) \quad \text{(Золотарёв)}$$

$$\rho(\Phi, F_{p\mathfrak{z}}) \le \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\varepsilon$$

$$\rho(\Phi, F_{p,\mathfrak{z}}) = |1-p| \sup_x |\Phi(x) - \Phi(\mathfrak{z}x)| \ge |1-p|\,|\Phi(1) - \Phi(\mathfrak{z})| =$$

(Лагранж)

$$= |1-p|\,|1-\mathfrak{z}|\,\varphi(\mathfrak{z}') \ge |1-p|\,|1-\mathfrak{z}|\,\varphi(1) = |1-p|\,|1-\mathfrak{z}|\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$$

$\mathfrak{z}' \in (\mathfrak{z}, 1)$

$$\Rightarrow |1-p|\,|1-\mathfrak{z}| \le \sqrt{2\pi e}$$

$$|1-p|\,|1-\mathfrak{z}| \le \sqrt{2\pi e}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\varepsilon \Rightarrow p \text{ и } \mathfrak{z} \text{ близки к } 1$$

$$L(u_{p,\mathfrak{z}}, 1) = \min(1-p, 1-\mathfrak{z}) \quad \text{(показать самим)}$$

$$\Rightarrow L^2(u_{p,\mathfrak{z}}, 1) = (\min(1-p, 1-\mathfrak{z}))^2 \le (1-p)(1-\mathfrak{z}) \le$$

$$\le c^2\varepsilon$$

$F_{p,a}(x) = p\Phi(x) + (1-p)\Phi(x-a)$

$Z = X + V_{p,a}$

$X \sim N(0,1)$

$V_{p,a} \sim \begin{cases} 0 & p \\ a & 1-p \end{cases}$

Пусть $|a|<1$

Тогда $\underset{\text{расстояние}}{\rho}(\Phi, F_{p,a}) = (1-p)\sup\limits_x |\Phi(x) - \Phi(x-a)| \geq$

$\geq (1-p)|\Phi(a) - \Phi(0)| = \underset{a' \in (0,a)}{(1-p)|a|\varphi(a')} \geq \frac{(1-p)|a|}{\sqrt{2\pi e}}$

<u>Теор. 6</u> $\exists p \in (0,1)$, $|a|<1$, $L(\Phi, F_{p,a}) \leq \varepsilon$

$\Rightarrow L(V_{p,a}, 0) \leq C\sqrt{\varepsilon}$, $C = (\sqrt{e}(1+\sqrt{2\pi}))^{\frac{1}{2}} < 2.405$

<u>Док-во:</u> применим рассуждения теор. 5 и соотношения выше

<u>Обобщения:</u>

$F_{p,\beta}(x) = p\Phi(x) + (1-p)\Phi(\beta x)$

$F_{q,\beta}(x) = q\Phi(x) + (1-q)\Phi(\beta x)$

$\rho(F_{p,\beta}, F_{q,\beta}) = |p-q|\sup\limits_x |\Phi(x) - \Phi(\beta x)| \geq$

$\geq \frac{|p-q||1-\beta|}{\sqrt{2\pi e}}$

<u>Теор. 7</u> Пусть $p, q \in (0,1)$ и $\beta \in (0,1)$

$L(F_{p,\beta}, F_{q,\beta}) \leq \varepsilon \Rightarrow L(U_{p,\beta}, U_{q,\beta}) \leq C\sqrt{\varepsilon}$

$\rho(F_{p,a}, F_{q,a}) \geq \frac{|p-q||a|}{\sqrt{2\pi e}}$

<u>Теор. 8</u> Пусть $p, q \in (0,1)$, $|a|<1$, $L(F_{p,a}, F_{q,a}) \leq \varepsilon$

$\Rightarrow L(V_{p,\beta}, V_{q,\beta}) \leq C\sqrt{\varepsilon}$

$F_{p\,\beta_1} = p\,\Phi(x) + (1-p)\,\Phi(\beta_1 x)$

$F_{p\,\beta_2} = p\,\Phi(x) + (1-p)\,\Phi(\beta_2 x)$

$p(F_{p,\beta_1}, F_{p,\beta_2}) \geq (1-p)\,|\Phi(\frac{\beta_1}{\beta_2}) - \Phi(1)|$ вместо $x \to \frac{1}{\beta_2}$

$p(F_{p,\beta_1}, F_{p,\beta_2}) = (1-p)\sup_x |\Phi(\beta_1 x) - \Phi(\beta_2 x)| \geq$

$\geq (1-p)\,|\Phi(\frac{\beta_1}{\beta_2}) - \Phi(1)| \geq \frac{|1-p|\,|1-\frac{\beta_1}{\beta_2}|}{\sqrt{2\pi e}}$

$p(F_{p,\beta_1}, F_{p,\beta_2}) \geq \ldots \frac{(1-p)\max|1-\frac{\beta_1}{\beta_2}|\,|1-\frac{\beta_2}{\beta_1}|}{\sqrt{2\pi e}}$

<u>Теор. 9</u> $\exists p \in (0;1)$, $\beta_1 .. \beta_2 \in (0,1)$

$L(F_{p,\beta_1}, F_{p,\beta_2}) < \varepsilon \Rightarrow L(U_{p,\beta_1}, U_{p,\beta_2}) \leq c\sqrt{\varepsilon}$

$(c = (\sqrt{e}(1+\sqrt{2\pi}))^{\frac{1}{2}}$

<u>Теор 10</u> $\exists p \in (0;1)$, $|a_1| < 1$, $|a_2| < 1$,

$L(F_{p\,a_1}, F_{p,a_2}) \leq \varepsilon \Rightarrow L(V_{p\,a_1}, V_{p\,a_2}) \leq c\sqrt{\varepsilon}$

$p(F_{p\,a_1}, F_{p,a_2}) \geq \frac{|1-p|\,(a_1 - a_2)}{\sqrt{2\pi e}}$

Моделирование распределения приращений финансовых индексов смесями норм. законов 12.12

Процесс $w(t)$, кот. моделир. поведение цен, заменим на процесс $w(\underline{X(t)})$

Время не р/м, а подчинено процессу $X(t)$,

$X(t)$ – процесс с неубывающими траекториями, выходящими из нуля

P_j – цена актива в j контракте

T_j – время заключения j контракта

$(P_j, T_j)_{j \geq 0}$ – процесс изменения цены

τ - момент вр.

$P(\tau)$ - ?

$P(\tau) = P_j$, $T_j \le \tau < T_{j+1}$ - цена актива в момент τ

$N(\tau)$ - число контрактов, заключённых к моменту τ

$$\frac{P(\tau)}{P(0)} = \prod_{j=1}^{N(\tau)} \frac{P_j}{P_{j-1}}$$

$P(0) = P_0$

$$P(\tau) - P(0) = \sum_{j=1}^{N(\tau)} (P_j - P_{j-1})$$

$$S(\tau) = \log P(\tau) - \log P(0) = \sum_{j=1}^{N(\tau)} (\log P_j - \log P_{j-1})$$

$$\log P(\tau) = S(\tau) + \log P(0)$$

$$P(\tau) = e^{S(\tau)} P(0)$$

Пусть $X_j = \log P_j - \log P_{j-1}$

$$S(\tau) = \sum_{j=1}^{N(\tau)} X_j$$

Пусть $\{X_j\}$ независимы (не обяз. одинак. распр

$N(\tau)$ возрастает (не обяз. $\tau \longrightarrow \infty$)

$N_1, N_2, N_3, \dots$ значения $N(\tau)$

$N_k, X_1, X_2, \dots$ независ. $\forall k$

$f_k(s)$ - хар. ф-ция $\sum_{j=1}^{N_k} X_j$

$$f_k(s) = \mathbb{E} e^{is \sum_{j=1}^{N_k} X_j}$$

Теор. 1 $X_1, X_2, \dots$ независ. сл. вел. $(X_j = \log P_j - \log P_{j-1}$

и пусть при некотором выборе b_k ($b_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$)

имеет место сходимость $P(\frac{1}{b_k} \sum_{j=1}^{k} X_j < x) - \Phi$

Пусть при некотором выборе d_k ($d_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$)

семейство сл. вел. $\{\frac{b_{N_k}}{d_k}\}$ является слабо ком

Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \left| f_k\left(\frac{s}{d_k}\right) - \int_0^\infty e^{-\frac{x^2 s^2}{2}} dA_k(x) \right| = 0$

$A_k(x) = P(b_{N_k} < x d_k)$

$\{\xi_n\}$ – слабо компактно

$\lim\limits_{x\to\infty} \sup P(|\xi_n|>x)=0$

$U_k = \frac{B_{N_k}}{d_k}$

$E e^{isXU_k}$ $\quad X \sim N(0,1)$ (масштабная смесь норм. законов)

X и U_k – независимы

$P(S(T)<x) \approx P(XU_k<x)$ в случае, если

$\{X_j\}$ удовл. ЦПТ (*)

если X_j одинаково распределены $\Rightarrow$

$(*) \Leftrightarrow \exists DX_i < \infty \quad B_k = \sqrt{k DX_1}$

Смешивающее распр. U_x опр. поведением $N(T)$

Пуассон. процесс – модель хаотич. потока событий

Процесс торгов неоднородный $\Rightarrow$ дважды стохастич. Пуассон. процесс (процесс Кокса)

$N(T)=N_1(\Lambda(T))$ $\quad N_1(t)$ – стандартн. Пуассон. процесс

$\Lambda(T)$ – процесс с неубыв. непр. справа траекториями, выходящими из нуля

$S(T)$ – обобщ. процесс Кокса

Обозначим $\overline{P}(T) = \max\limits_{0\le t\le T} P(t)$

$\underline{P}(T) = \min\limits_{0\le t\le T} P(t)$

– фиксир. $EN(T)=\lambda T$, λ – параметр

$P(T,\lambda)$, $\overline{P}(T,\lambda)$, $\underline{P}(T,\lambda)$

Теор. 2 $X_j = \log P_j - \log P_{j-1}$ — н.о.р.с.в. $EX_j =$
$DX_i = \delta^2 < \infty$

Следующие утверждения эквивалентны

1) $P\left(\frac{\log P(t) - \log P(0)}{\delta\sqrt{\lambda t}} < x\right) \Rightarrow F(x)$

2) $P\left(\frac{\log \overline{P}(t) - \log P(0)}{\delta\sqrt{\lambda t}} < x\right) \Rightarrow \overline{F}(x)$

3) $P\left(\frac{\log \underline{P}(t) - \log P(0)}{\delta\sqrt{\lambda t}} < x\right) \Rightarrow \underline{F}(x)$

4) $\exists$ сл. вел. U: $\frac{\Lambda(t,\lambda)}{t\lambda} \Rightarrow U$

Здесь $F(x) = \mathbb{E}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{U}}\right)$

$\overline{F}(x) = 2\mathbb{E}\Phi\left(\frac{\max(0,x)}{\sqrt{U}}\right) - 1$

$\underline{F}(x) = 2\left(1 - \mathbb{E}\Phi\left(-\frac{\min(0,x)}{\sqrt{U}}\right)\right)$

$P(P(t,\lambda) < x) \approx \mathbb{E}\Phi\left(\frac{\log x - \log P(0)}{\delta\sqrt{\lambda t U}}\right)$, $x > 0$

$P(\overline{P}(t,\lambda) < x) \approx 2\mathbb{E}\Phi\left(\frac{\max(0, \log x - \log P(0))}{\delta\sqrt{\lambda t U}}\right)$

$P(\underline{P}(t,\lambda) < x) \approx 2\left(1 - \mathbb{E}\Phi\left(-\frac{\min(0, \log x - \log P(0}{\delta\sqrt{\lambda t U}}\right.\right.$

Из теор. 2 (4) $\Rightarrow$ смешивающ. расп. в
определяется поведением ~~ПТ~~ $\Lambda(t)$, т.е. инт

Одно семейство случ. величин подобрать сл
всех теорий (каждый раз новое)

Пусть $t \to \infty$, $t \leftrightarrow n$

$\Lambda(n,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ λ_i — н.о.р.с.в., $E\lambda_i = \lambda$

$\frac{\Lambda(n,\lambda)}{n\lambda} \xrightarrow{P} 1$ (ЗБЧ)

В случае, когда $\tau \to \infty$, U вырождается в $\underline{1}$
(⇒ на больших промежутках времени нормальная апроксимация оправдана)
На коротких промежутках „хвосты" тяжёлые